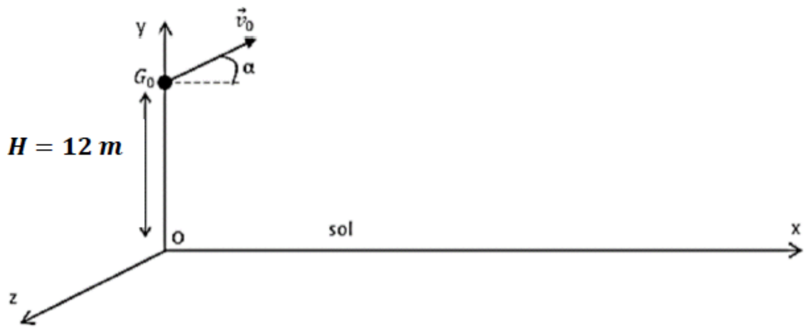
EXERCICES. 2ÈME LOI DE NEWTON DANS UN CHAMP UNIFORME

Remarque : PFD = Principe Fondamental de la Dynamique = 2e Loi de Newton

Exercice 1. Projectile en chute libre

Un projectile de masse $m = 450\ g$ est éjecté depuis le point G_0 situé à une altitude $H = 12\ m$ avec une vitesse $\vec{v}_0$ inclinée d'un angle $\alpha = 45°$ par rapport à l'horizontale et de valeur $v_0 = 20\ m.s^{-1}$ comme précisé sur le **schéma ci-contre**. On suppose que le projectile n'est soumis qu'au seul champ de pesanteur $\vec{g}$ considéré uniforme. On néglige toute action de l'air. Le référentiel terrestre d'étude est supposé galiléen.

Donnée : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$



1. Exprimer les coordonnées du vecteur position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ du centre d'inertie G du ballon en fonction des données de l'énoncé.
2. À l'aide du PFD, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de G
3. En déduire les coordonnées des vecteurs vitesse et position de G à un instant t.

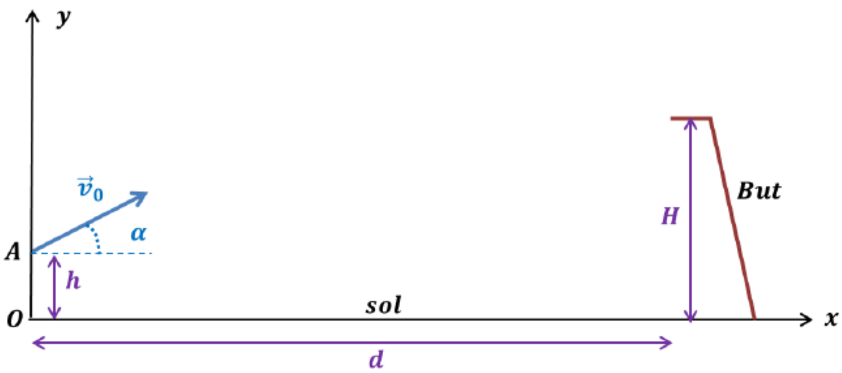
À l'aide des coordonnées établies précédemment :

4. Montrer que la trajectoire du ballon est plane dans le plan (xOy).
5. Déterminer l'équation de la trajectoire du ballon. Quelle est sa nature ?
6. Calculer l'instant t_S où la balle atteint-elle le sommet de la trajectoire.
7. Calculer l'altitude maximale L atteinte par le ballon.
8. Calculer la distance horizontale D parcourue par le ballon jusqu'à l'impact au sol.

correction sur : https://youtu.be/3MGU98eA0OQ

Exercice 2. But marqué ?

Le centre d'inertie G d'un ballon de masse $m = 160\ g$ et de rayon $r = 10\ cm$ se trouve initialement au point A situé à une hauteur $h = 40\ cm$ du sol lorsque le ballon est tiré avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontal et de valeur $v_0 = 14{,}0\ m.s^{-1}$. Le but d'une hauteur $H = 2{,}14\ m$ est situé à une distance $d = 15{,}0\ m$ du point de tir.



On suppose que le ballon n'est soumis qu'au seul champ de pesanteur considéré uniforme.

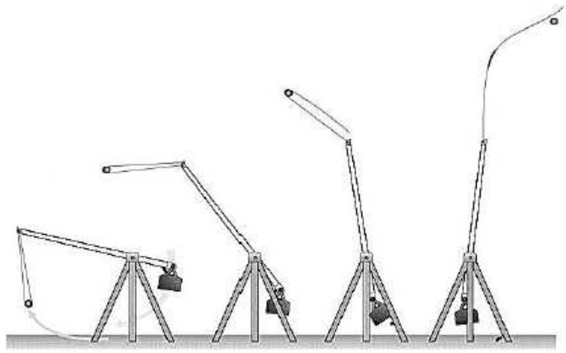
Donnée : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

1. Exprimer les coordonnées des vecteurs position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et vitesse initiale $\vec{v}_0$ du centre d'inertie G dans le repère orthonormé (xOy).
2. À l'aide du PFD, exprimer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du point G.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et position $\overrightarrow{OG}(t)$ du point G.
4. Établir l'équation de la trajectoire $y(x)$ qu'aura le point G. Quelle sera sa nature ?
5. Quelle sera la vitesse du point G en $km.h^{-1}$ au sommet de sa trajectoire ?
6. Le but sera-t-il marqué ? Si le but est marqué, en combien de temps après le tir, le ballon rentrera-t-il dans le but ? Et quelle sera alors sa vitesse en $km.h^{-1}$ à ce moment ?

correction sur https://lc.cx/mRJQ

Exercice 3. Le trébuchet

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant. Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile. Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H = 10,0 m et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ (voir **figure 1 ci-dessous).** Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.



Données :

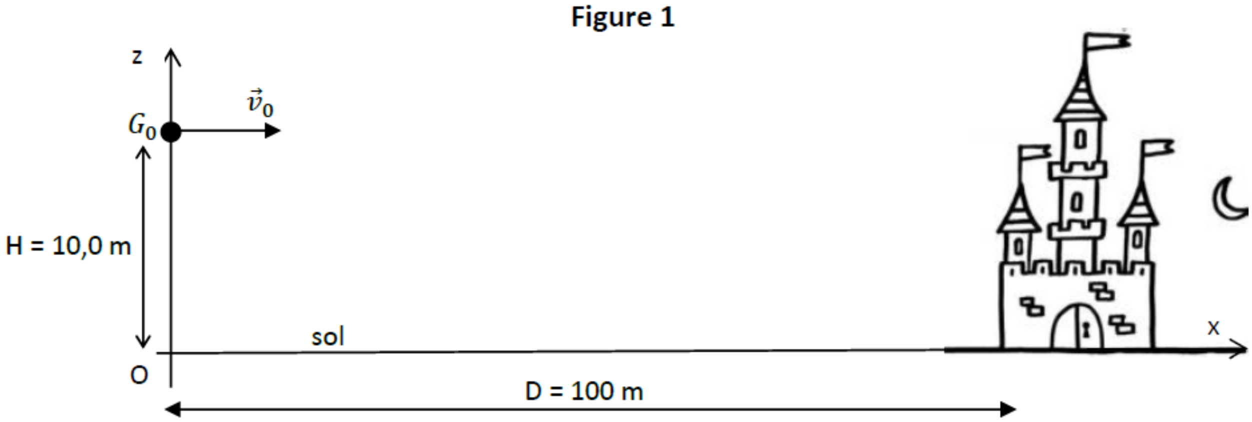
Masse du projectile m = 130 kg.

Intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s^{-2}.

Hauteur du projectile au moment du lancer : H = 10,0 m.

On étudie dans cet exercice le mouvement du centre d'inertie G du projectile après libération dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et dans le repère (Oxz) défini sur la **Figure 1**. Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile ainsi que la poussée d'Archimède seront négligés dans cette étude. La situation est représentée sur la **Figure 1** ci-dessous :

Figure 1

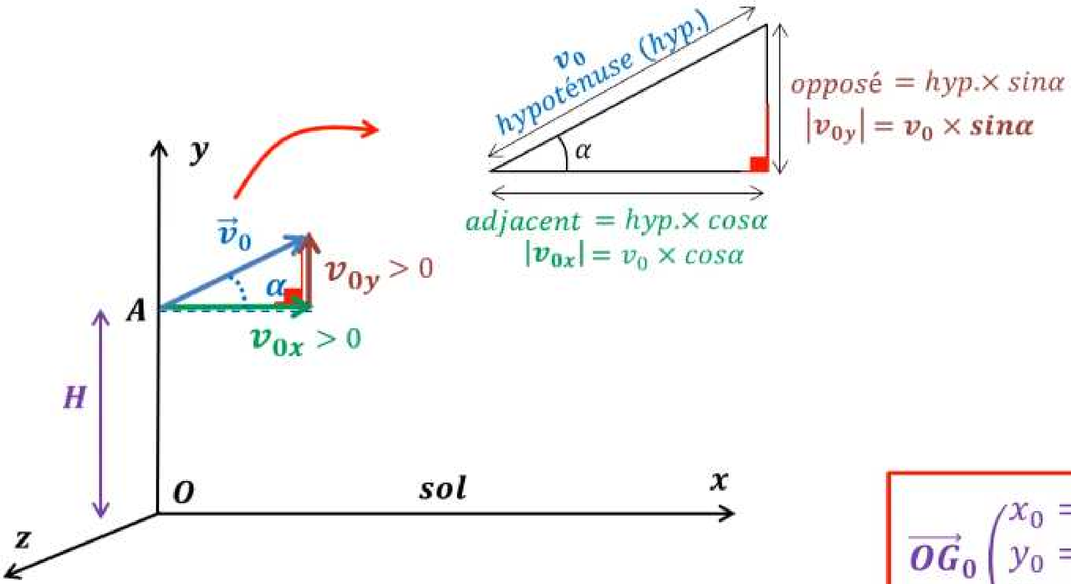


1. Exprimer les coordonnées du vecteur position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction des données de l'énoncé.
2. En appliquant la 2ème loi de Newton (PFD), exprimer les coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile.
3. En déduire les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OG}$ à un instant t.
4. Quelle est la nature du mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal ? Justifier à partir des équations horaires établies précédemment.
5. Établir l'équation de la trajectoire de G. Recopier le schéma de la **figure 1** et représenter qualitativement l'allure de la trajectoire.
6. Calculer la vitesse initiale v_0 avec laquelle le projectile doit être lancé pour atteindre la base du mur du château située à une distance D = 100 m. Exprimer la valeur en km.h^{-1}.
7. Calculer la durée de la chute du projectile avant qu'il ne touche le sol.

Correction :

Exercice 1 :

1. Exprimer les coordonnées des vecteurs position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et vitesse initiale $\vec{v}_0$ du centre d'inertie G du projectile dans le repère d'espace orthonormé défini sur le schéma.



$$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix} x_0 = \mathbf{0} \\ y_0 = +\boldsymbol{H} \\ z_0 = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

glissement selon Ox

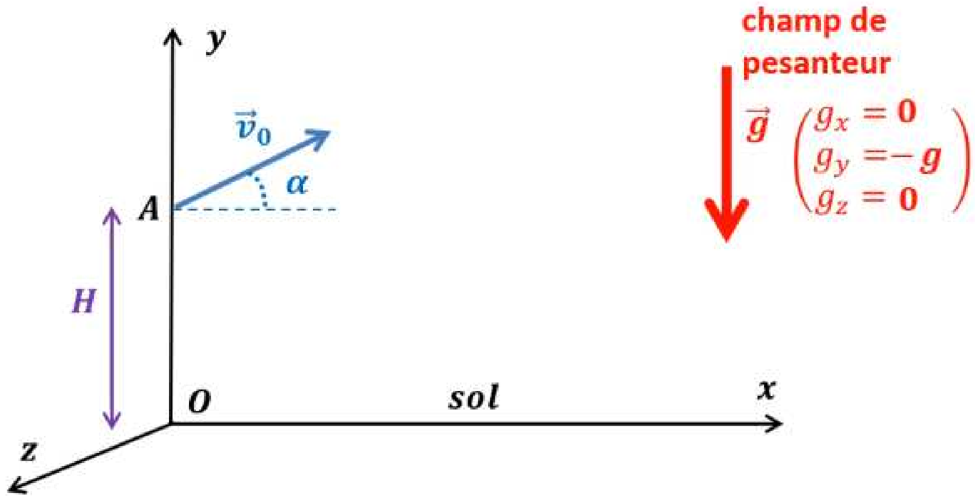
$$\vec{v}_0\begin{pmatrix} v_{0x} = +|v_{0x}| = +v_0 \times cos\alpha \\ v_{0y} = +|v_{0y}| = +v_0 \times sin\alpha \\ v_{0z} = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

glissement selon Oy

glissement selon Oz

$$\vec{v}_0\begin{pmatrix} v_{0x} = +v_0\ cos\alpha \\ v_{0y} = +v_0\ sin\alpha \\ v_{0z} = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

2. À l'aide du PFD, exprimer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du point G.



2e Loi de Newton

PFD appliqué au point G dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \qquad \text{car } m \text{ est constante}$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{g} = \vec{a} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} a_x = g_x \\ a_y = g_y \\ a_z = g_z \end{pmatrix} \qquad \boxed{\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{pmatrix}}$$

3. En déduire les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et position $\overrightarrow{OG}(t)$ du point G.

Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow$ $\vec{v}$ est donc la primitive de $\vec{a}$ déterminée par les conditions initiales de vitesse :

$$\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_{0x} = +v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = +v_0 \sin\alpha \\ v_{0z} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow v_x = \underbrace{C_1}_{v_x(t=0)} = v_{0x} = +v_0\cos\alpha \\ \longrightarrow v_y = -gt + \underbrace{C_2}_{v_y(t=0)} = -gt + v_{0y} = -gt + v_0\sin\alpha \\ \longrightarrow v_z = \underbrace{C_3}_{v_z(t=0)} = v_{0z} = 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{v}(t)\begin{pmatrix} \boldsymbol{v_x = +v_0\cos\alpha} \\ \boldsymbol{v_y = -gt + v_0\sin\alpha} \\ \boldsymbol{v_z = 0} \end{pmatrix}}$$

Par définition : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \longrightarrow$ $\overrightarrow{OG}$ est la primitive de $\vec{v}$ déterminée par les conditions initiales de position :

$$\overrightarrow{OG}_0 \begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = +H \\ z_0 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = +v_0 \cos\alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow x = +v_0\cos\alpha \times t + \underbrace{C_4}_{x(t=0)} = +v_0 \cos\alpha\, t + x_0 = +v_0 \cos\alpha\, t \\ \longrightarrow y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin\alpha \times t + \underbrace{C_5}_{y(t=0)} = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + y_0 = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + H \\ \longrightarrow z = \underbrace{C_6}_{z(t=0)} = z_0 = 0 \end{matrix}$$

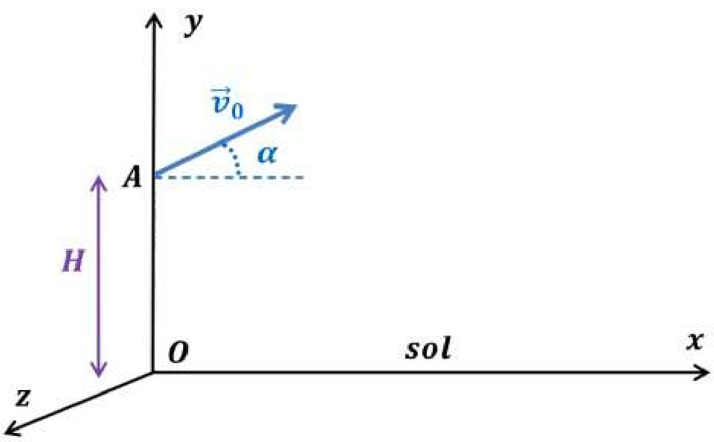
primitive de zéro = **constante C_1**

primitive d'une constante C_1 = **fonction affine $C_1\, t + C_2$**

primitive d'une fonction affine $C_1\, t + C_2$ = **polynôme du 2nd degré $\frac{C_1}{2}t^2 + C_2\, t + C_3$**

$$\boxed{\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x = +v_0 \cos\alpha\, t} \\ \boldsymbol{y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + H} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{pmatrix}}$$

4. Montrer que la trajectoire du point G est plane dans le plan (xOy).



$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x = +v_0 \cos\alpha\, t} \\ \boldsymbol{y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + H} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{pmatrix}$$

à chaque instant $z = 0$

$\downarrow$

le point G reste dans le plan (xOy)

$\downarrow$

sa trajectoire est plane dans le plan (xOy)

5. Établir l'équation de la trajectoire du point G. Quelle est sa nature ?

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x = +v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + H \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

on isole t dans x $\rightarrow$ $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$

on remplace dans y

$$y(x) = -\frac{g}{2} \times \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + \cancel{v_0} \sin\alpha \times \frac{x}{\cancel{v_0} \cos\alpha} + H$$

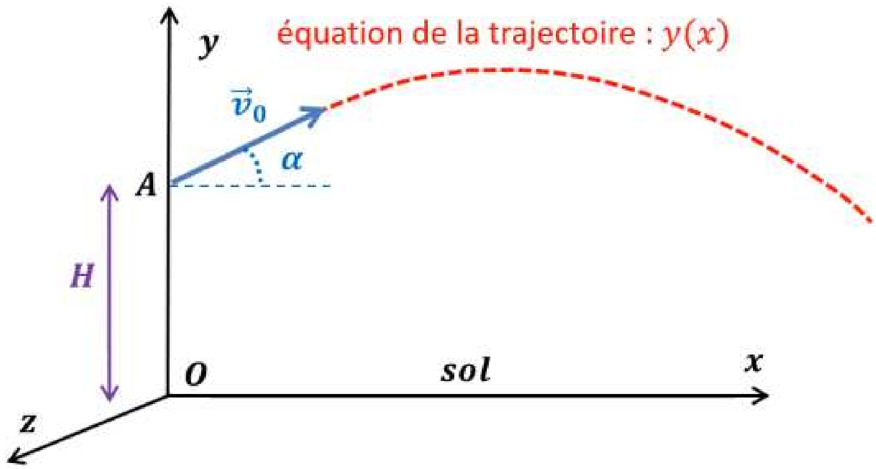
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\boxed{y(x) = \underbrace{-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}}_{a} x^2 + \underbrace{\tan\alpha}_{b}\, x + \underbrace{H}_{c}}$$

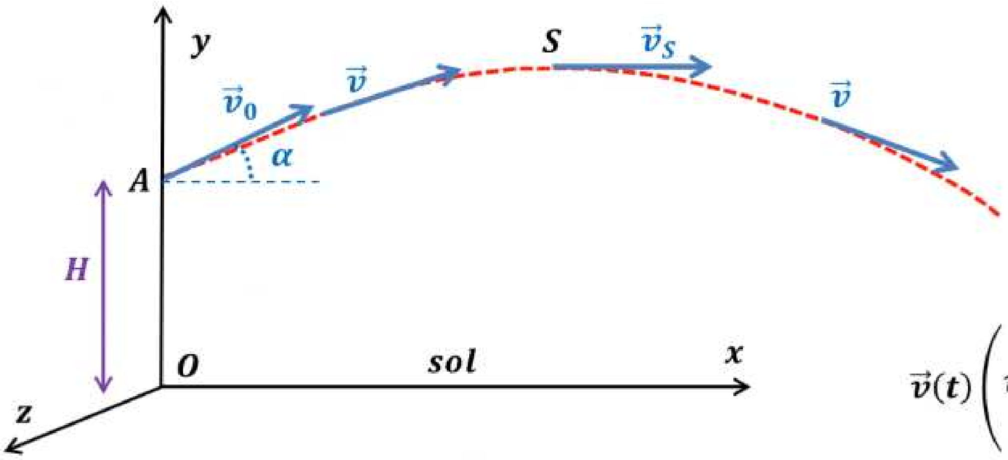
: polynôme du second degré → trajectoire parabolique

$$y = a\,x^2 + bx + c$$

parabole orientée vers le bas



6. Calculer l'instant t_S où le du point G atteint le sommet de la trajectoire.



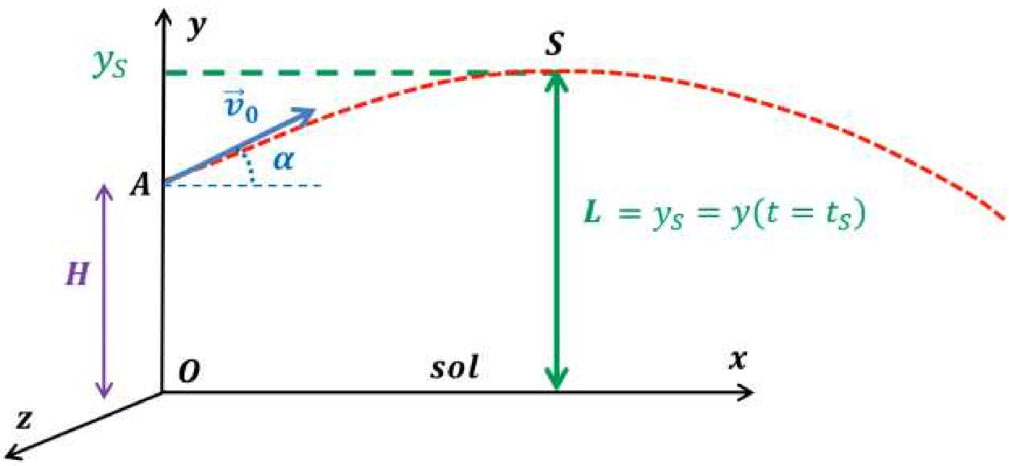
$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix} v_x = +v_0 cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 sin\alpha \\ v_z = 0 \end{pmatrix}$$

le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire $\rightarrow$ $\vec{v}$ est horizontal au sommet S $\rightarrow$ $v_{yS} = 0$

à $t = t_S$: $v_{yS} = -gt_S + v_0 sin\alpha = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{t_S = \dfrac{v_0 sin\alpha}{g}}$

$$t_S = \frac{20 \times sin45°}{9{,}81} = \mathbf{1{,}4\ s}$$

7. Calculer l'altitude maximale L atteinte par le point G .

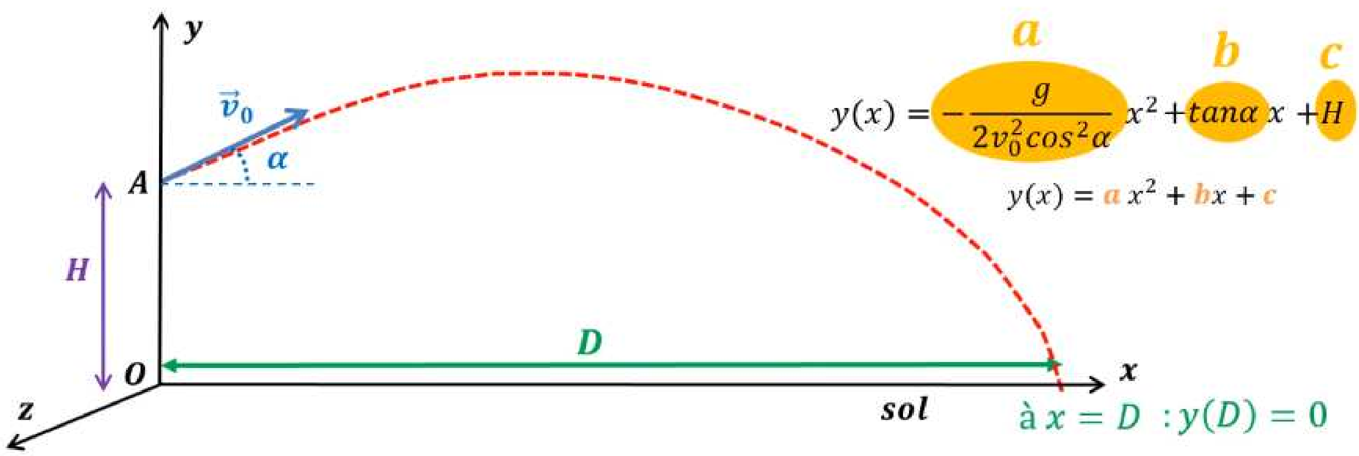


$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x = +v_0\ cos\alpha\ t \\ y = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_0\ sin\alpha\ t + H \\ z = 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t_S) = -\frac{g}{2}{t_S}^2 + v_0 sin\alpha \times t_S + H$$

$$y(t_S) = -\frac{9{,}81}{2} \times 1{,}4^2 + 20 \times sin45° \times 1{,}4 + 12$$

$$y(t_S) = \boxed{22\ \text{m}}$$

8. Calculer la distance horizontale D parcourue par le point G lorsqu'il touche le sol.



On cherche x tel que $y(x) = 0$ → résoudre : $a\,x^2 + bx + c = \mathbf{0}$

$$a = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} = -\frac{9{,}81}{2 \times 20^2 \times (cos45°)^2} = -0{,}025\ m^{-1} \qquad b = tan45° = 1{,}0 \qquad c = 12\ m$$

solutions de la forme : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $\Delta = b^2 - 4ac = 2{,}2$

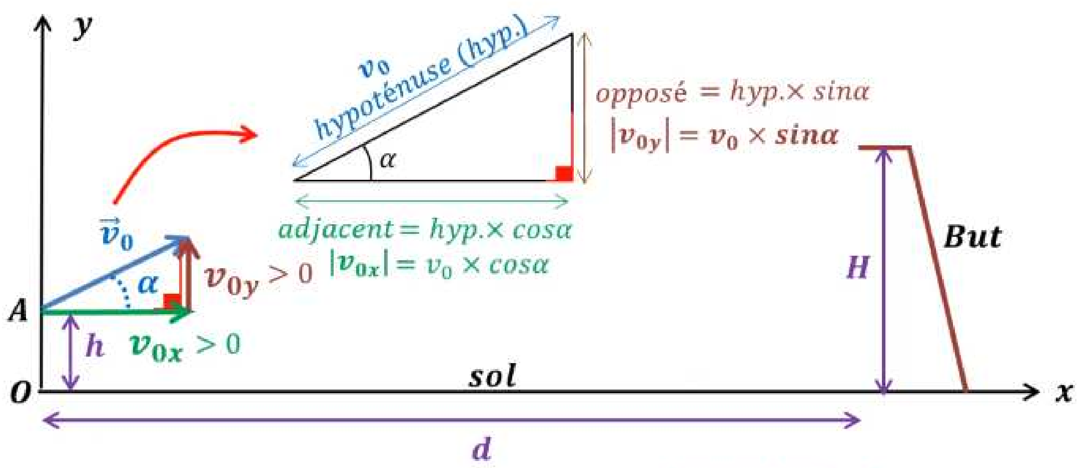
$$x_1 = \frac{-1{,}0 + \sqrt{2{,}2}}{-0{,}050} = -9{,}7\ m \qquad x_2 = \frac{-1{,}0 - \sqrt{2{,}2}}{-0{,}050} = 50\ m$$

pas de sens physique

$\boxed{D = 50\ m}$

Exercice 2 :

1. Exprimer les coordonnées des vecteurs position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et vitesse initiale $\vec{v}_0$ du centre d'inertie G.

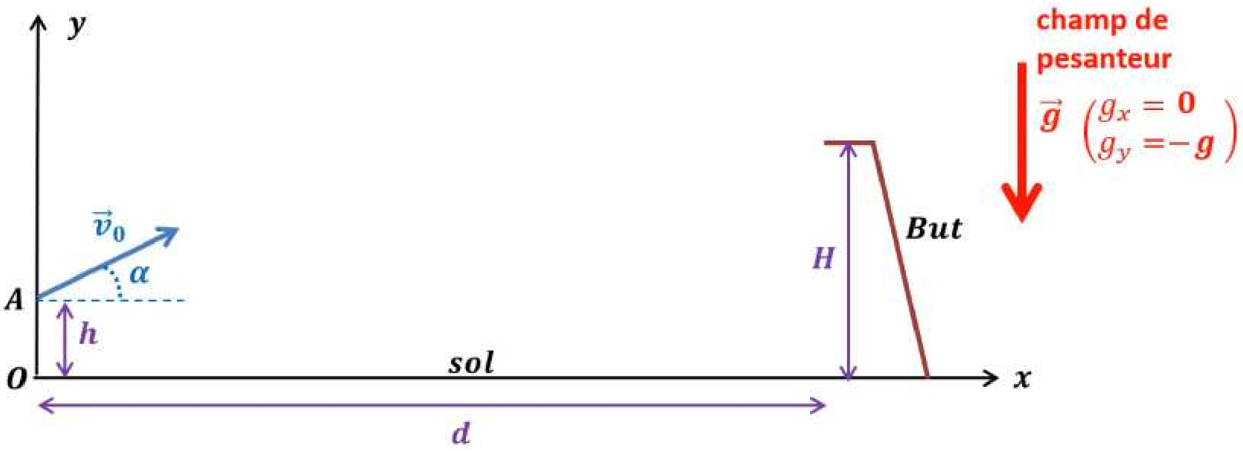


glissement selon Ox

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix} x_0 = \mathbf{0} \\ y_0 = +\boldsymbol{h} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_0\begin{pmatrix} v_{0x} = +|v_{0x}| = +v_0 \times cos\alpha \\ v_{0y} = +|v_{0y}| = +v_0 \times sin\alpha \end{pmatrix}$$

glissement selon Oy

2. À l'aide du PFD, exprimer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du point G dans le repère orthonormé (xOy).



2^e Loi de Newton

PFD appliqué au point G dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \qquad \text{car } m \text{ est constante}$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{g} = \vec{a} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} a_x = g_x \\ a_y = g_y \end{pmatrix} \qquad \boxed{\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix}}$$

3. En déduire les coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et position $\overrightarrow{OG}(t)$ du point G.

Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \longrightarrow$ $\vec{v}$ est donc une primitive de $\vec{a}$ mais déterminée par les conditions initiales :

$$\vec{v}_0\begin{pmatrix} v_{0x} = +v_0\ cos\alpha \\ v_{0y} = +v_0\ sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g \end{pmatrix}$$

$$a_x \longrightarrow v_x = \overset{v_x(t=0)}{C_1} = v_{0x} = +v_0 cos\alpha$$

$$a_y \longrightarrow v_y = -gt + \underset{v_y(t=0)}{C_2} = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 sin\alpha$$

$$\boxed{\vec{v}(t)\begin{pmatrix} v_x = +v_0 cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 sin\alpha \end{pmatrix}}$$

Par définition : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \longrightarrow$ $\overrightarrow{OG}$ est donc une primitive de $\vec{v}$ mais déterminée par les conditions initiales :

$$\overrightarrow{OG}_0\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = +h \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = +v_0\ cos\alpha \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0\ sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$v_x \longrightarrow x = +v_0 cos\alpha \times t + \overset{x(t=0)}{C_3} = +v_0\ cos\alpha\ t + x_0 = +v_0\ cos\alpha\ t$$

$$v_y \longrightarrow y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 sin\alpha \times t + \underset{y(t=0)}{C_4} = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\ sin\alpha\ t + y_0 = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\ sin\alpha\ t + h$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x = +v_0\ cos\alpha\ t \\ y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\ sin\alpha\ t + h \end{pmatrix}}$$

primitive de zéro = **constante C_1**

primitive d'une constante C_1 = **fonction affine $C_1\ t + C_2$**

primitive d'une fonction affine $C_1\ t + C_2$ = **polynôme du 2nd degré $\frac{C_1}{2}t^2 + C_2\ t + C_3$**

4. Établir l'équation de la trajectoire $y(x)$ du point G. Quelle sera sa nature ?

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 cos\alpha\, t \\ y = -\dfrac{g}{2}t^2 + v_0 sin\alpha\, t + h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{on isole } t \text{ dans } x} t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

on remplace dans y

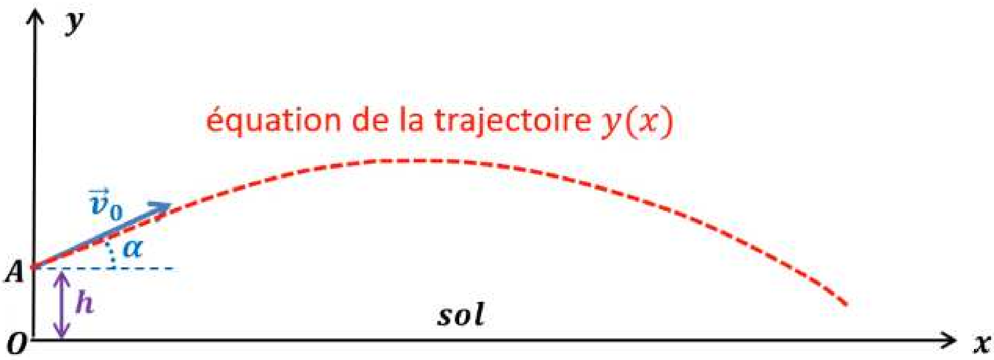
$$y(x) = -\frac{g}{2}\times\frac{x^2}{v_0^2 cos^2\alpha} + \cancel{v_0} sin\alpha \times \frac{x}{\cancel{v_0} cos\alpha} + h \qquad \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tan\alpha$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha}x^2 + tan\alpha\, x + h}$$

: polynôme du second degré → trajectoire parabolique

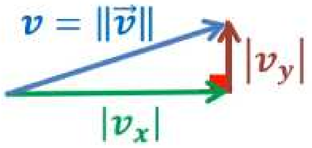
$y = a\,x^2 + bx + c$

parabole orientée vers le bas

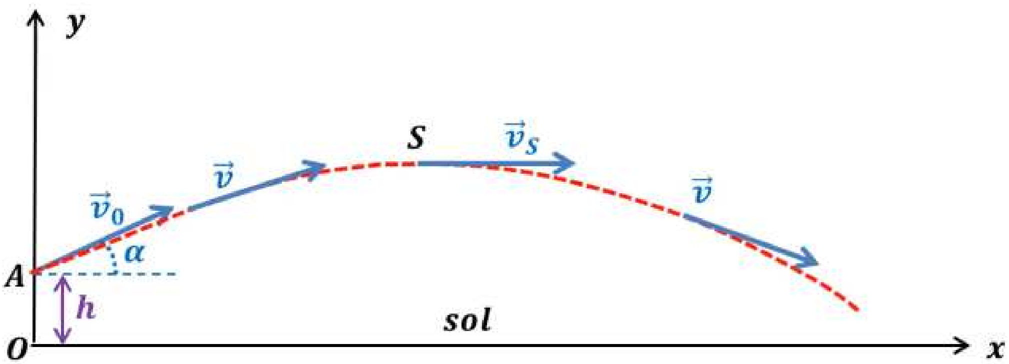


5. Quelle sera la vitesse du point G en $km.h^{-1}$ au sommet de sa trajectoire ?

$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix} v_x = +v_0 cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

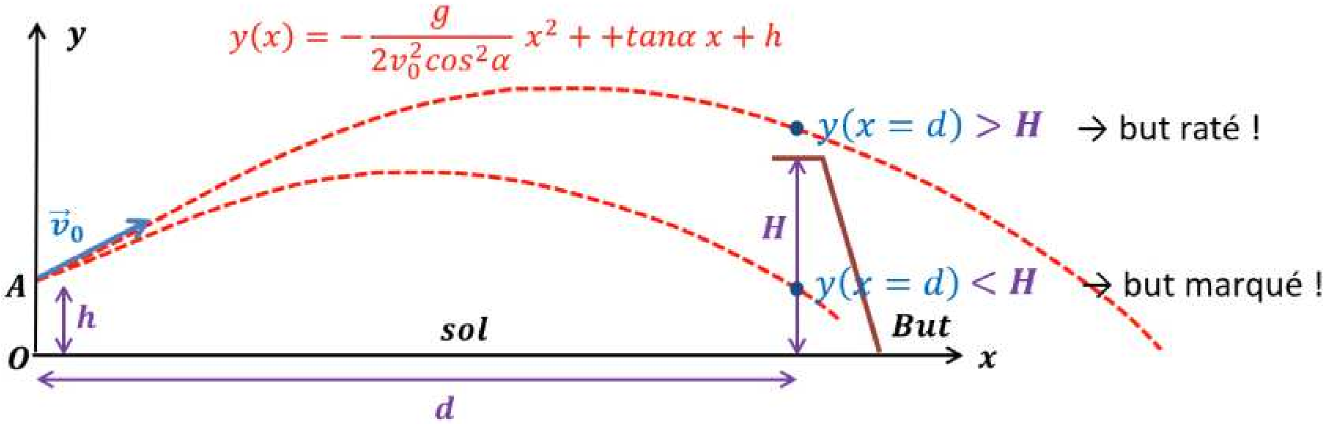


le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire → $\vec{v}$ est horizontal au sommet S → $v_{yS} = 0$

$$v_S = \sqrt{v_{xS}^2 + v_{yS}^2} = \sqrt{v_{xS}^2 + 0} = |v_{xS}| = +v_0 cos\alpha$$

$$v_S = +14 \times cos30° = 12\ m.s^{-1} = 12 \times 3{,}6\ km.h^{-1} = 43\ km.h^{-1}$$

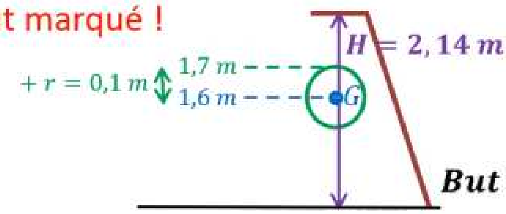
6. Le but sera-t-il marqué ?



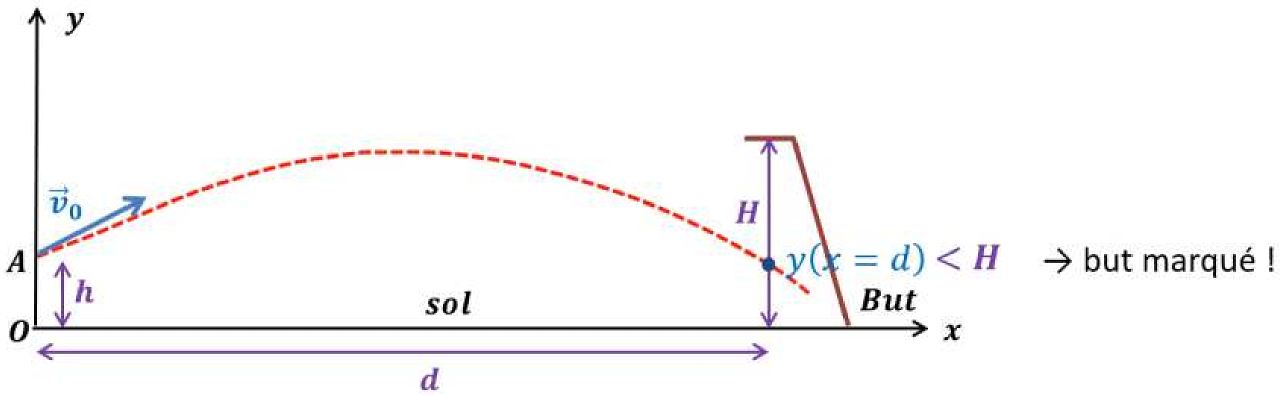
$$y(x = d = 15\ m) = -\frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha} d^2 + +tan\alpha \times d + h$$

$$= -\frac{9{,}81}{2 \times 14^2 \times cos^2 30°} 15^2 + +tan30° \times 15 + 0{,}40$$

$$= 1{,}6\ m < \boldsymbol{H = 2,14\ m}$$ → but marqué !



7. Si le but est marqué, en combien de temps après le tir, le ballon rentrera-t-il dans le but ? Et quelle sera alors sa vitesse en $km.h^{-1}$ à ce moment ?



$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{pmatrix} x = +v_0\ cos\alpha\ t \\ y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\ sin\alpha\ t + h \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{on isole } t \text{ dans } x} t = \frac{x}{v_0 cos\alpha} \longrightarrow \boldsymbol{t(x=d)} = \frac{d}{v_0 cos\alpha}$$

$$= \frac{15}{14 \times cos30°}$$

$$= \mathbf{1{,}2\ s}$$

$$\vec{v}(t)\begin{pmatrix} v_x = +v_0 cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 sin\alpha \end{pmatrix} \qquad v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 cos\alpha)^2 + (-gt + v_0 sin\alpha)^2}$$

$$\boldsymbol{v(t = 1{,}2\ s)} = \sqrt{(14 \times cos30°)^2 + (-9{,}81 \times 1{,}2 + 14 \times sin30°)^2} = \mathbf{13\ m.s^{-1}}$$

$$= \mathbf{13 \times 3{,}6\ km.h^{-1} = 47\ km.h^{-1}}$$

Exercice 3 :

Exercice. Le trébuchet

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant. Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile. Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H = 10,0 m et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ (voir **figure 1 ci-dessous**). Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.

Données :

Masse du projectile m = 130 kg.

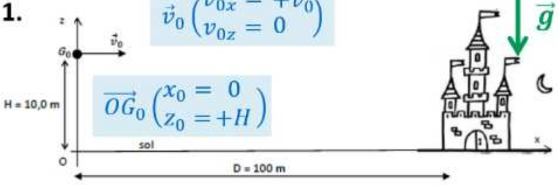
Intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s⁻².

Hauteur du projectile au moment du lancer : H = 10,0 m.

On étudie dans cet exercice le mouvement du centre d'inertie G du projectile après libération dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et dans le repère (Oxz) défini sur la Figure 1. Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile ainsi que la poussée d'Archimède seront négligés dans cette étude. La situation est représentée sur la Figure 1 ci-dessous :

1.

$$\vec{v}_0\begin{pmatrix} v_{0x} = +v_0 \\ v_{0z} = 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OG}_0\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ z_0 = +H \end{pmatrix} \qquad \vec{g}\begin{pmatrix} g_x = 0 \\ g_z = -g \end{pmatrix}$$



2.

2ème loi de Newton (PFD) appliqué au projectile :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a} \quad \boxed{\rightarrow \vec{a} = \vec{g}}$$

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\rightarrow \vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}}$$

Exercice. Le trébuchet

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant. Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile. Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H = 10,0 m et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ (voir **figure 1 ci-dessous**). Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.

Données :

Masse du projectile m = 130 kg.

Intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s^{-2}.

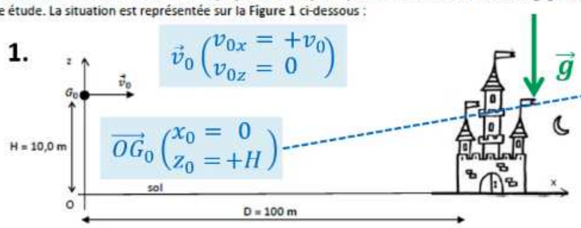
Hauteur du projectile au moment du lancer : H = 10,0 m.

On étudie dans cet exercice le mouvement du centre d'inertie G du projectile après libération dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et dans le repère (Oxz) défini sur la **Figure 1**. Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile ainsi que la poussée d'Archimède seront négligés dans cette étude. La situation est représentée sur la **Figure 1** ci-dessous :

1.

$\vec{v}_0\begin{pmatrix} v_{0x} = +v_0 \\ v_{0z} = 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG}_0\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ z_0 = +H \end{pmatrix}$



$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +v_0 \\ v_z = -gt \end{pmatrix}$

3.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \xrightarrow{\text{on primitive } \vec{v}} \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 t + C_3 \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + C_4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OG}_0\begin{pmatrix} x_0 = 0 + C_3 \\ z_0 = 0 + C_4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OG}_0\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ z_0 = +H \end{pmatrix} \end{array}\right] \begin{array}{l} \to C_3 = 0 \\ \to C_4 = +H \end{array}$$

identification des constantes grâce aux conditions initiales (à t=0)

$$\boxed{\to \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + H \end{pmatrix}}$$

Exercice. Le trébuchet

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant. Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile. Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H = 10,0 m et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ (voir **figure 1 ci-dessous**). Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.

Données :

Masse du projectile m = 130 kg.

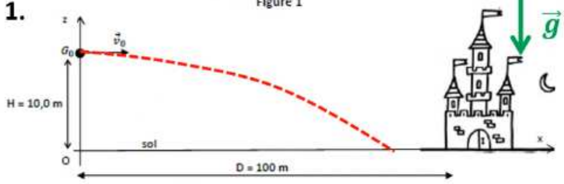
Intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s^{-2}.

Hauteur du projectile au moment du lancer : H = 10,0 m.

On étudie dans cet exercice le mouvement du centre d'inertie G du projectile après libération dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et dans le repère (Oxz) défini sur la **Figure 1**. Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile ainsi que la poussée d'Archimède seront négligés dans cette étude. La situation est représentée sur la **Figure 1** ci-dessous :

1.

Figure 1



1. Exprimer les coordonnées du vecteur position initiale $\overrightarrow{OG}_0$ et du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction des données de l'énoncé.
2. En appliquant la 2ème loi de Newton (PFD), exprimer les coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile.
3. En déduire les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OG}$ à un instant t.
4. Quelle est la nature du mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal ? Justifier à partir des équations horaires établies précédemment.
5. Établir l'équation de la trajectoire de G. Recopier le schéma de la **figure 1** et représenter qualitativement l'allure de la trajectoire.

$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +v_0 \\ v_z = -gt \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + H \end{pmatrix}$

4.

$v_x = cste$ → mouvement **uniforme** selon (Ox)

⇔ l'ombre du projectile au sol a un mouvement **uniforme**

5.

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + H \end{pmatrix} \quad \to \quad t = \frac{x}{v_0} \quad \to \quad z(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + H$$

polynôme du 2nd degré : $z(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + H$

→ trajectoire parabolique orientée vers le bas

Exercice. Le trébuchet

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant. Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile. Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H = 10,0 m et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ (voir **figure 1 ci-dessous**). Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.

Données :

Masse du projectile m = 130 kg.

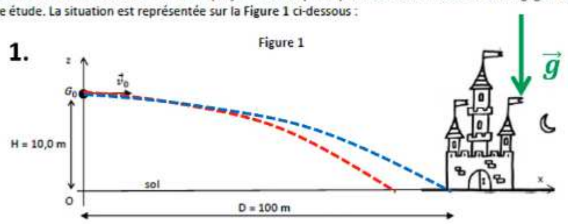
Intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s⁻².

Hauteur du projectile au moment du lancer : H = 10,0 m.

On étudie dans cet exercice le mouvement du centre d'inertie G du projectile après libération dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et dans le repère (Oxz) défini sur la **Figure 1**. Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile ainsi que la poussée d'Archimède seront négligés dans cette étude. La situation est représentée sur la **Figure 1** ci-dessous :

1.

Figure 1



1. Exprimer les coordonnées du vecteur position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction des données de l'énoncé.
2. En appliquant la 2ème loi de Newton (PFD), exprimer les coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile.
3. En déduire les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OG}$ à un instant t.
4. Quelle est la nature du mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal ? Justifier à partir des équations horaires établies précédemment.
5. Établir l'équation de la trajectoire de G. Recopier le schéma de la **figure 1** et représenter qualitativement l'allure de la trajectoire.
6. Calculer la vitesse initiale v_0 avec laquelle le projectile doit être lancé pour atteindre la base du mur du château située à une distance D = 100 m. Exprimer la valeur en km.h⁻¹.
7. Calculer la durée de la chute du projectile avant qu'il ne touche le sol.

$\boxed{\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}}$ $\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +v_0 \\ v_z = -gt \end{pmatrix}}$ $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + H \end{pmatrix}}$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + H}$$

6.

v_0 ? telle que quand $\boldsymbol{z = 0 :\ x = D} = 100\ m$

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2}D^2 + H$$

$$\frac{g}{2v_0^2}D^2 = H$$

$$\frac{1}{v_0^2} = \frac{2H}{gD^2}$$

$$v_0^2 = \frac{gD^2}{2H}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{gD^2}{2H}}} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 100^2}{2 \times 10{,}0}} = 70\ m.s^{-1}$$

$$= 70 \times 3{,}6\ km.h^{-1}$$

$$\boldsymbol{= 2{,}5 \times 10^2\ km.h^{-1}}$$

$\sqrt{\frac{m.s^{-2} \times m^2}{m}} = \sqrt{m^2 s^{-2}} = m.s^{-1}$ → relation homogène !

Exercice. Le trébuchet

Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet. Son principe de fonctionnement est le suivant. Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur par des cordages. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé le projectile. Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H = 10,0 m et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ (voir **figure 1 ci-dessous**). Les mouvements du contrepoids et du projectile s'effectuent dans un champ de pesanteur uniforme.

Données :

Masse du projectile m = 130 kg.

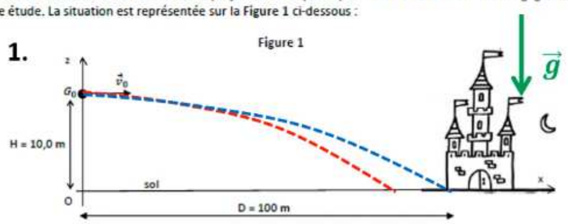
Intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s⁻².

Hauteur du projectile au moment du lancer : H = 10,0 m.

On étudie dans cet exercice le mouvement du centre d'inertie G du projectile après libération dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et dans le repère (Oxz) défini sur la **Figure 1**. Le système étudié est le projectile. Les frottements de l'air sur le projectile ainsi que la poussée d'Archimède seront négligés dans cette étude. La situation est représentée sur la **Figure 1** ci-dessous :

1.

Figure 1



1. Exprimer les coordonnées du vecteur position initiale $\overrightarrow{OG_0}$ et du vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ en fonction des données de l'énoncé.
2. En appliquant la 2ème loi de Newton (PFD), exprimer les coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile.
3. En déduire les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et position $\overrightarrow{OG}$ à un instant t.
4. Quelle est la nature du mouvement du projectile en projection sur l'axe horizontal ? Justifier à partir des équations horaires établies précédemment.
5. Établir l'équation de la trajectoire de G. Recopier le schéma de la **figure 1** et représenter qualitativement l'allure de la trajectoire.
6. Calculer la vitesse initiale v_0 avec laquelle le projectile doit être lancé pour atteindre la base du mur du château située à une distance D = 100 m. Exprimer la valeur en km.h⁻¹.
7. Calculer la durée de la chute du projectile avant qu'il ne touche le sol.

$\boxed{\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}}$ $\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +v_0 \\ v_z = -gt \end{pmatrix}}$ $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +v_0 t \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + H \end{pmatrix}}$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + H}$$

7.

t_{chute} ? tel que : $\boldsymbol{x = D} = 100\ m$

$$D = +v_0 t_{chute}$$

$$\boxed{t_{chute} = \frac{D}{v_0}} \qquad t_{chute} = \frac{100\ m}{70\ m.s^{-1}} \boldsymbol{= 1{,}4\ s}$$