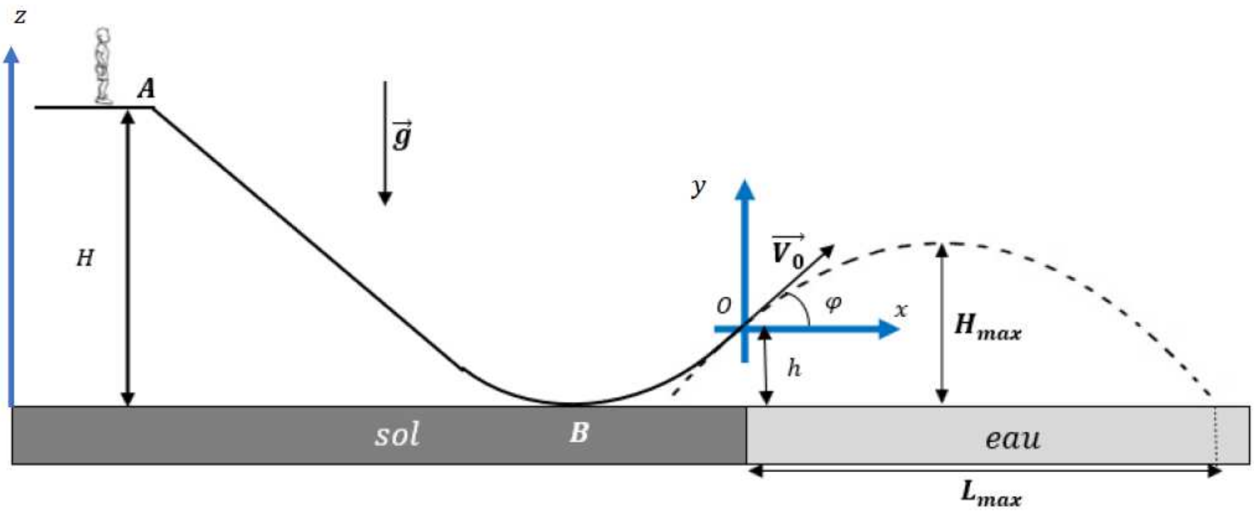
Exercice Un sport en plein essor

Le *water jump* est une activité en plein essor. Le principe en est simple : un skieur muni d'une combinaison glisse sur un toboggan préalablement mouillé et terminé par un tremplin. Puis, à la sortie de ce dernier, il effectue un saut en chute libre avant de terminer sa course dans un plan d'eau.



Données :

- intensité du champ de pesanteur terrestre : g = 9,81 m.s^{-2}
- masse du skieur et de son équipement : m = 73 kg
- il existe quatre tremplins dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

	hauteur $\boldsymbol{H}$	hauteur $\boldsymbol{h}$	angle $\boldsymbol{\varphi}$
Tremplin débutant	H_1 = 3,5 m	h_1 = 0,85 m	φ_1 = 20°
Tremplin médian	H_2 = 7,0 m	h_1 = 0,85 m	φ_1 = 20°
Tremplin averti	H_1 = 3,5 m	h_2 = 1,7 m	φ_2 = 45°
Tremplin expert	H_2 = 7,0 m	h_2 = 1,7 m	φ_2 = 45°

- l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression : $E_{pp} = mgz$ avec le point O choisi comme origine de E_{pp}

Les dimensions du skieur étant faibles devant toutes les autres utilisées dans le problème, il est modélisé par un point matériel. Les frottements seront négligés dans toutes les étapes du mouvement. L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Partie 1 : utilisation du tremplin débutant

1. Calculer le travail de chaque force exercée sur le skieur au cours de la descente sur le toboggan (entre le point A et le point O). Préciser l'effet du travail pour chaque force.
2. Justifier que l'énergie mécanique du skieur est conservée entre A et O.
3. À l'aide d'une approche énergétique, calculer la vitesse du skieur en O en $km.h^{-1}$ sachant qu'il quitte le point A sans vitesse initiale.

Partie 2 : étude du mouvement du skieur après avoir quitté le tremplin

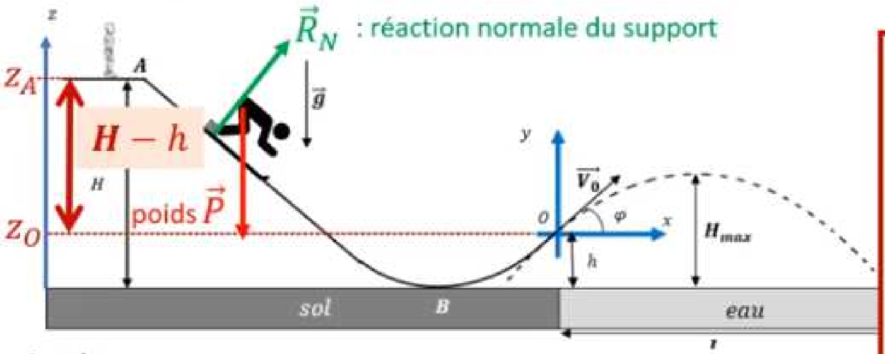
4. On déclenche le chronomètre lorsque le skieur est au point O. Écrire les coordonnées du vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$.
5. Établir, dans le repère (O, x, y), l'équation de la trajectoire du skieur lorsqu'il a quitté le toboggan. Quelle est sa nature ?

En ski acrobatique (« free style »), il faut effectuer un maximum de figures lors des sauts. Pour ce faire les skieurs doivent sauter le plus haut possible.

6. Le skieur atteint sa hauteur maximale à l'instant t_{max}. Exprimer t_{max} en fonction de V_0, g, et φ.
7. Montrer que l'ordonnée correspondante, notée y_{max} dans le repère (O, x, y), vaut $y_{max} = \frac{V_0^2 sin^2\varphi}{2g}$.
8. Calculer la hauteur maximale atteinte H_{max} au-dessus du plan d'eau si le skieur utilise le « tremplin averti » sachant que sa vitesse en O vaut $V_0 = 5{,}9\ m.s^{-1}$.

Exercice. Un sport en plein essor

Le *water jump* est une activité en plein essor. Le principe en est simple : un skieur muni d'une combinaison glisse sur un toboggan préalablement mouillé et terminé par un tremplin. Puis, à la sortie de ce dernier, il effectue un saut en chute libre avant de terminer sa course dans un plan d'eau.



Données :

- intensité du champ de pesanteur terrestre : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}
- masse du skieur et de son équipement : $m = 73$ kg
- il existe quatre tremplins dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous

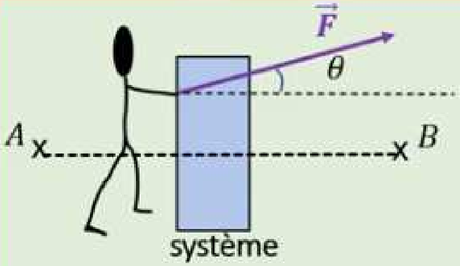
	hauteur H	hauteur h	angle φ
Tremplin débutant	$H_1 = 3{,}5$ m	$h_1 = 0{,}85$ m	$\varphi_1 = 20°$
Tremplin médian	$H_2 = 7{,}0$ m	$h_1 = 0{,}85$ m	$\varphi_1 = 20°$
Tremplin averti	$H_1 = 3{,}5$ m	$h_2 = 1{,}7$ m	$\varphi_2 = 45°$
Tremplin expert	$H_2 = 7{,}0$ m	$h_2 = 1{,}7$ m	$\varphi_2 = 45°$

- l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression : $E_{pp} = mgz$ avec le point O choisi comme origine de E_{pp}

Les dimensions du skieur étant faibles devant toutes les autres utilisées dans le problème, il est modélisé par un point matériel. Les frottements seront négligés dans toutes les étapes du mouvement. L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Partie 1 : utilisation du tremplin débutant

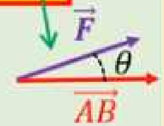
1. Calculer le travail de chaque force exercée sur le skieur au cours de la descente sur le toboggan (entre le point A et le point O). Préciser l'effet du travail pour chaque force.
2. Justifier que l'énergie mécanique du skieur est conservée entre A et O.
3. À l'aide d'une approche énergétique, calculer la vitesse du skieur en O en $km.h^{-1}$ sachant qu'il quitte le point A sans vitesse initiale.



travail d'une force constante de A à B :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F \times AB \times cos\theta}$$

J N m



$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)}$$

expression pratique pour le poids

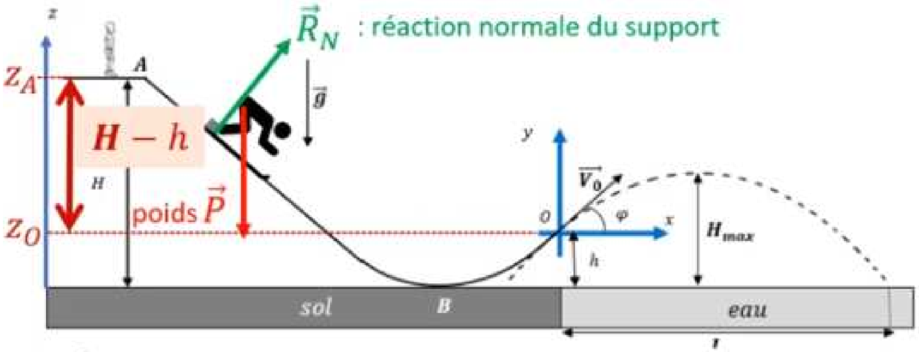
1. $\boldsymbol{W_{A\to O}(\vec{R}_N) = 0}$ car $\vec{R}_N$ toujours $\perp$ au déplacement

$$W_{A\to O}(\vec{P}) = mg(z_A - z_O) = mg(H - h) = 73 \times 9{,}81 \times (3{,}5 - 0{,}85)$$

$\boldsymbol{W_{A\to O}(\vec{P}) = +1,9 \times 10^3\ J = +1,9\ kJ > 0}$ **: travail moteur**

Exercice. Un sport en plein essor

Le *water jump* est une activité en plein essor. Le principe en est simple : un skieur muni d'une combinaison glisse sur un toboggan préalablement mouillé et terminé par un tremplin. Puis, à la sortie de ce dernier, il effectue un saut en chute libre avant de terminer sa course dans un plan d'eau.



Données :

- intensité du champ de pesanteur terrestre : $g = 9{,}81$ m.s^{-2}
- masse du skieur et de son équipement : $m = 73$ kg
- il existe quatre tremplins dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

	hauteur H	hauteur h	angle φ
Tremplin débutant	$H_1 = 3{,}5$ m	$h_1 = 0{,}85$ m	$\varphi_1 = 20°$
Tremplin médian	$H_2 = 7{,}0$ m	$h_1 = 0{,}85$ m	$\varphi_1 = 20°$
Tremplin averti	$H_1 = 3{,}5$ m	$h_2 = 1{,}7$ m	$\varphi_2 = 45°$
Tremplin expert	$H_2 = 7{,}0$ m	$h_2 = 1{,}7$ m	$\varphi_2 = 45°$

- l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression : $E_{pp} = mgz$ avec le point O choisi comme origine de E_{pp}

Les dimensions du skieur étant faibles devant toutes les autres utilisées dans le problème, il est modélisé par un point matériel. Les frottements seront négligés dans toutes les étapes du mouvement. L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Partie 1 : utilisation du tremplin débutant

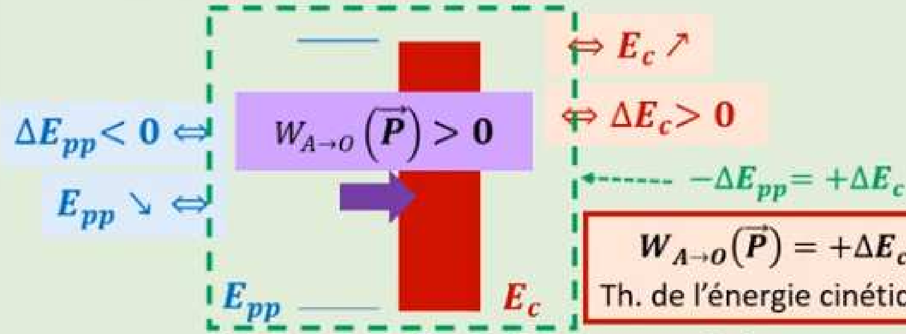
1. Calculer le travail de chaque force exercée sur le skieur au cours de la descente sur le toboggan (entre le point A et le point O). Préciser l'effet du travail pour chaque force.
2. Justifier que l'énergie mécanique du skieur est conservée entre A et O.
3. À l'aide d'une approche énergétique, calculer la vitesse du skieur en O en $km.h^{-1}$ sachant qu'il quitte le point A sans vitesse initiale.

$\vec{P}$ est la seule force à travailler

or $\vec{P}$ est une force **conservative**

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{on associe au skieur une énergie potentielle de pesanteur } E_{pp} \\ \text{telle que : } W_{A\to O}(\vec{P}) = -\Delta E_{pp} \end{cases}$

et ici le travail de $\vec{P}$ est moteur :



$\boxed{W_{A\to O}(\vec{P}) = +\Delta E_c}$ Th. de l'énergie cinétique

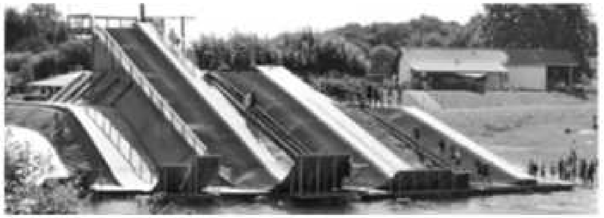
$E_{mécanique} = E_{pp} + E_c$: conservée !

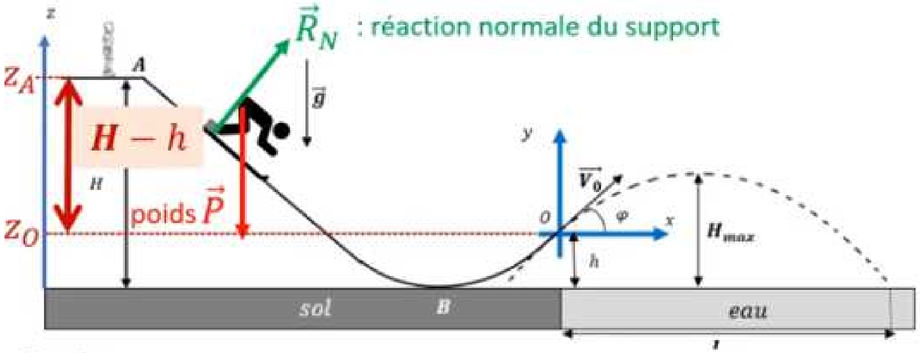
2.

$E_{méca}$ **est conservée car la seule force à travailler est conservative ($\vec{P}$)**

Exercice. Un sport en plein essor

Le *water jump* est une activité en plein essor. Le principe en est simple : un skieur muni d'une combinaison glisse sur un toboggan préalablement mouillé et terminé par un tremplin. Puis, à la sortie de ce dernier, il effectue un saut en chute libre avant de terminer sa course dans un plan d'eau.





Données :

- intensité du champ de pesanteur terrestre : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$
- masse du skieur et de son équipement : $m = 73$ kg
- il existe quatre tremplins dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

	hauteur H	hauteur h	angle φ
Tremplin débutant	$H_1 = 3{,}5$ m	$h_1 = 0{,}85$ m	$\varphi_1 = 20°$
Tremplin médian	$H_2 = 7{,}0$ m	$h_1 = 0{,}85$ m	$\varphi_1 = 20°$
Tremplin averti	$H_1 = 3{,}5$ m	$h_2 = 1{,}7$ m	$\varphi_2 = 45°$
Tremplin expert	$H_2 = 7{,}0$ m	$h_2 = 1{,}7$ m	$\varphi_2 = 45°$

- l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression : $E_{pp} = mgz$ avec le point O choisi comme origine de E_{pp}

Les dimensions du skieur étant faibles devant toutes les autres utilisées dans le problème, il est modélisé un point matériel. Les frottements seront négligés dans toutes les étapes du mouvement. L'étude effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Partie 1 : utilisation du tremplin débutant

1. Calculer le travail de chaque force exercée sur le skieur au cours de la descente sur le toboggan (entre le point A et le point O). Préciser l'effet du travail pour chaque force.
2. Justifier que l'énergie mécanique du skieur est conservée entre A et O.
3. À l'aide d'une approche énergétique, calculer la vitesse du skieur en O en $km.h^{-1}$ sachant qu'il quitte le point A sans vitesse initiale.

3. 1ère méthode : conservation de l'énergie mécanique entre A et O

$$E_m(A) = E_m(O)$$

$$E_c(A) + E_{pp}(A) = E_c(O) + E_{pp}(O)$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = \frac{1}{2}mv_O^2 + mgz_O$$

$$0 + mgz_A - mgz_O = \frac{1}{2}mv_O^2$$

$$mg(z_A - z_O) = \frac{1}{2}mv_O^2 \rightarrow v_0^2 = 2g(H-h) \quad \boldsymbol{\rightarrow v_O = \sqrt{2g(H-h)}}$$

$$v_O = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times (3{,}5 - 0{,}85)} = \mathbf{7{,}2\ m.s^{-1}} = 7{,}2 \times 3{,}6\ km.h^{-1}$$

$$\boldsymbol{v_O = 26\ km.h^{-1}}$$

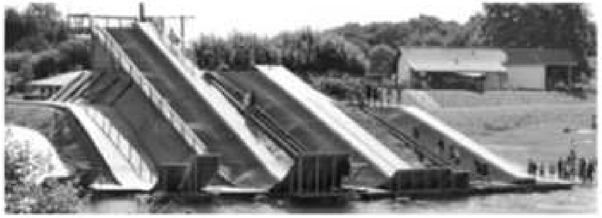
2ème méthode : théorème de l'énergie cinétique entre A et O

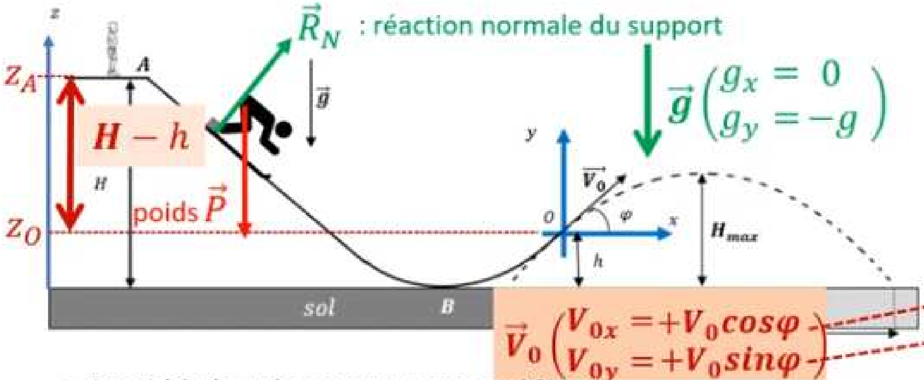
$$\Delta E_c = \sum W_{A\to O}(\vec{F}_{ext.}) \qquad \frac{1}{2}mv_O^2 - 0 = W_{A\to O}(\vec{P}) \rightarrow \boldsymbol{v_O} = \sqrt{\frac{2 \times W_{A\to O}(\vec{P})}{m}}$$

$$\frac{1}{2}mv_O^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to O}(\vec{P}) \qquad \boldsymbol{v_O} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}9 \times 10^3}{73}} = \mathbf{7{,}2\ m.s^{-1}}$$

Exercice. Un sport en plein essor

Le *water jump* est une activité en plein essor. Le principe en est simple : un skieur muni d'une combinaison glisse sur un toboggan préalablement mouillé et terminé par un tremplin. Puis, à la sortie de ce dernier, il effectue un saut en chute libre avant de terminer sa course dans un plan d'eau.





- intensité du champ de pesanteur terrestre : g = 9,81 m.s^{-2}
- masse du skieur et de son équipement : m = 73 kg
- il existe quatre tremplins dont les caractéristiques sont d[...]dessous :

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{pmatrix}$$

	hauteur H	hauteu[...]	
Tremplin débutant	H_1 = 3,5 m	h_1 = 0,8[...]	[...]
Tremplin médian	H_2 = 7,0 m	h_1 = 0,85 m	φ_1 = 20°
Tremplin averti	H_1 = 3,5 m	h_2 = 1,7 m	φ_2 = 45°
Tremplin expert	H_2 = 7,0 m	h_2 = 1,7 m	φ_2 = 45°

- l'énergie potentielle de pesanteur a pour expression : $E_{pp} = mgz$ avec le point O choisi comme origine de E_{pp}

Les dimensions du skieur étant faibles devant toutes les autres utilisées dans le problème, il est modélisé par un point matériel. Les frottements seront négligés dans toutes les étapes du mouvement. L'étude est effectuée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Partie 2 : étude du mouvement du skieur après avoir quitté le tremplin

4. On déclenche le chronomètre lorsque le skieur est au point O. Écrire les coordonnées du vecteur vitesse initial $\vec{V}_0$.
5. Établir, dans le repère (O, x, y), l'équation de la trajectoire du skieur lorsqu'il a quitté le toboggan. Quelle est sa nature ?

5.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \quad \textbf{: 2}^{\textbf{ème}} \textbf{ loi de Newton}$$

$$\rightarrow \vec{a} = \vec{g} \quad \rightarrow \vec{a}\begin{pmatrix} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{pmatrix} \qquad \boxed{\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{pmatrix}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow{\text{on primitive } \vec{a}} \vec{v}\begin{pmatrix} v_x = C_1 \\ v_y = -gt + C_2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +V_0 cos\varphi \\ v_y = -gt + V_0\, sin\varphi \end{pmatrix}}$$

à t = 0

$$\vec{V}_0\begin{pmatrix} V_{0x} = C_1 \\ V_{0y} = 0 + C_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow C_1 = +V_0 cos\varphi \\ \rightarrow C_2 = +V_0 sin\varphi \end{matrix}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \xrightarrow{\text{on primitive } \vec{v}} \overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +V_0 cos\varphi \times t + C_3 \\ y = -\frac{g}{2}t^2 + V_0\, sin\varphi \times t + C_4 \end{pmatrix}$$

à t = 0

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{pmatrix} x_0 = 0 + C_3 \\ y_0 = 0 + 0 + C_4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow C_3 = 0 \\ \rightarrow C_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = +V_0 cos\varphi \times t \\ y = -\frac{g}{2}t^2 + V_0\, sin\varphi \times t \end{pmatrix}}$$

5. Établir, dans le repère (O, x, y), l'équation de la trajectoire du skieur lorsqu'il a quitté le toboggan. Quelle est sa nature ?

5.

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = +V_0 cos\varphi \times t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + V_0\, sin\varphi \times t \end{pmatrix}$$

équation de trajectoire $y = f(x)$:

on isole t dans $x(t)$: $\rightarrow t = \frac{x}{V_0 cos\varphi}$

$$\frac{sin\varphi}{cos\varphi} = tan\varphi$$

on remplace t dans $y(t)$:$\rightarrow y(x) = -\frac{g}{2} \times \frac{x^2}{V_0^2 cos^2\varphi} + \cancel{V_0} sin\varphi \times \frac{x}{\cancel{V_0} cos\varphi}$

polynôme du 2nd degré : $\boxed{\rightarrow y(x) = -\frac{g}{2V_0^2 cos^2\varphi} x^2 + tan\varphi \times x}$

→ trajectoire parabolique orientée vers le bas

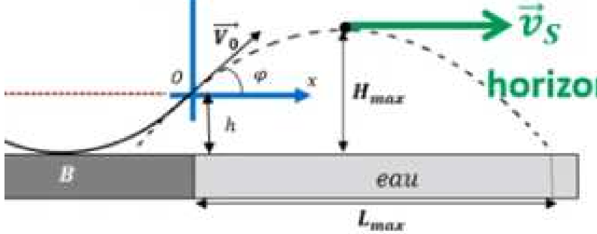
6.

$\vec{v}$ toujours tangent à la trajectoire dans le sens du mouvement !

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = +V_0 cos\varphi \times t \\ y(t) = -\dfrac{g}{2}t^2 + V_0\ sin\varphi \times t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +V_0 cos\varphi \\ v_y = -gt + V_0\ sin\varphi \end{pmatrix}$$

S : sommet de la trajectoire



horizontal !!

$$\rightarrow \boldsymbol{v_{yS} = 0} = -gt_{max} + V_0\ sin\varphi$$

$$\rightarrow gt_{max} = +V_0 sin\varphi$$

$$\boxed{t_{max} = \frac{V_0 sin\varphi}{g}}$$

7.

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = +V_0 cos\varphi \times t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + V_0\, sin\varphi \times t \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +V_0 cos\varphi \\ v_y = -gt + V_0\, sin\varphi \end{pmatrix}$$

trajectoire

$$\boxed{t_{max} = \frac{V_0 sin\varphi}{g}}$$

$$\rightarrow y_{max} = -\frac{g}{2}\left(\frac{V_0 sin\varphi}{g}\right)^2 + V_0\, sin\varphi \times \frac{V_0 sin\varphi}{g}$$

$$= -\frac{V_0^2 sin^2\varphi}{2g} + \frac{V_0^2 sin^2\varphi}{g}$$

$$= \frac{-V_0^2 sin^2\varphi + 2V_0^2 sin^2\varphi}{2g}$$

$$\boxed{y_{max} = \frac{V_0^2 sin^2\varphi}{2g}}$$

8.

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x(t) = +V_0 cos\varphi \times t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + V_0\, sin\varphi \times t \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} v_x = +V_0 cos\varphi \\ v_y = -gt + V_0\, sin\varphi \end{pmatrix}$$

trajectoire

$$\boxed{y_{max} = \frac{V_0^2 sin^2\varphi}{2g}}$$

$$\rightarrow H_{max} = y_{max} + h = \frac{V_0^2 sin^2\varphi}{2g} + h$$

$$= \frac{5{,}9^2 \times sin^2 45°}{2 \times 9{,}81} + 1{,}7$$

$$\boxed{H_{max} = 2,6\ m}$$