Exercice 1. Satellites de communication

Documents mis à disposition :

Doc 1 : Le système de radionavigation GALILEO

Connaître sa position exacte dans l'espace et dans le temps, autant d'informations qu'il sera nécessaire d'obtenir de plus en plus fréquemment avec une grande fiabilité. Dans quelques années, ce sera possible avec le système de radionavigation par satellite GALILEO, initiative lancée par l'Union européenne et l'Agence spatiale européenne (ESA). Ce système mondial assurera une complémentarité avec le système actuel GPS (Global Positioning System). GALILEO repose sur une constellation de trente satellites et des stations terrestres permettant de fournir des informations concernant leur positionnement à des usagers de nombreux secteurs (transport, services sociaux, justice, etc…). Le premier satellite du programme, Giove-A, a été lancé le 28 décembre 2005.

D'après le site http://www.cnes.fr/

Doc 2 : METEOSAT, un satellite géostationnaire

Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004. D'une masse de 282 kg, METEOSAT a été satellisé sur une orbite circulaire et géostationnaire, c'est-à-dire de manière à ce que sa position paraisse fixe aux yeux d'un observateur terrestre. Il fournit ainsi de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.

Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse m_{sat} = 700 kg. Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et sa trajectoire est considérée circulaire à l'altitude h = $23,6\times10^3$ km. Le mouvement du satellite est étudié dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :
- Constante universelle de gravitation : G = $6,67\times10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- La Terre est supposée sphérique et homogène de masse M_T = $5,98\times10^{24}$ kg et de rayon R_T = $6,38\times10^3$ km

Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse m_{sat} = 700 kg. Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et sa trajectoire est considérée circulaire à l'altitude h = $23,6\times10^3$ km. Le mouvement du satellite est étudié dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :
- Constante universelle de gravitation : G = $6,67\times10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- La Terre est supposée sphérique et homogène de masse M_T = $5,98\times10^{24}$ kg et de rayon R_T = $6,38\times10^3$ km

Partie 1. Mouvement du satellite Giove-A autour de la Terre

1. Sans souci d'échelle, faire un schéma représentant la Terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la Terre sur le satellite.
2. Donner l'expression vectorielle de la force exercée par la Terre sur le satellite en fonction des données de l'énoncé et d'un vecteur unitaire à définir.
3. Établir l'expression vectorielle du vecteur accélération du point G et en déduire que la vitesse du satellite est uniforme et calculer sa valeur en $km.h^{-1}$.
4. Calculer la période de révolution T du satellite.

Partie 2. Détermination de la masse de la Terre

Il existe actuellement deux systèmes de positionnement par satellites : le système américain GPS et le système russe GLONASS. Le tableau fourni dans la suite (**annexe 1**), rassemble les périodes T et les rayons R des trajectoires des satellites correspondants, ainsi que les données relatives aux satellites de type Météosat.

5. Placer le point correspondant à Giove-A sur le graphe en **annexe 2**, et montrer que $T^2 = f(R^3)$ est une fonction linéaire.
6. Déterminer à l'aide de la courbe une valeur expérimentale de la masse de la Terre. Expliquer.

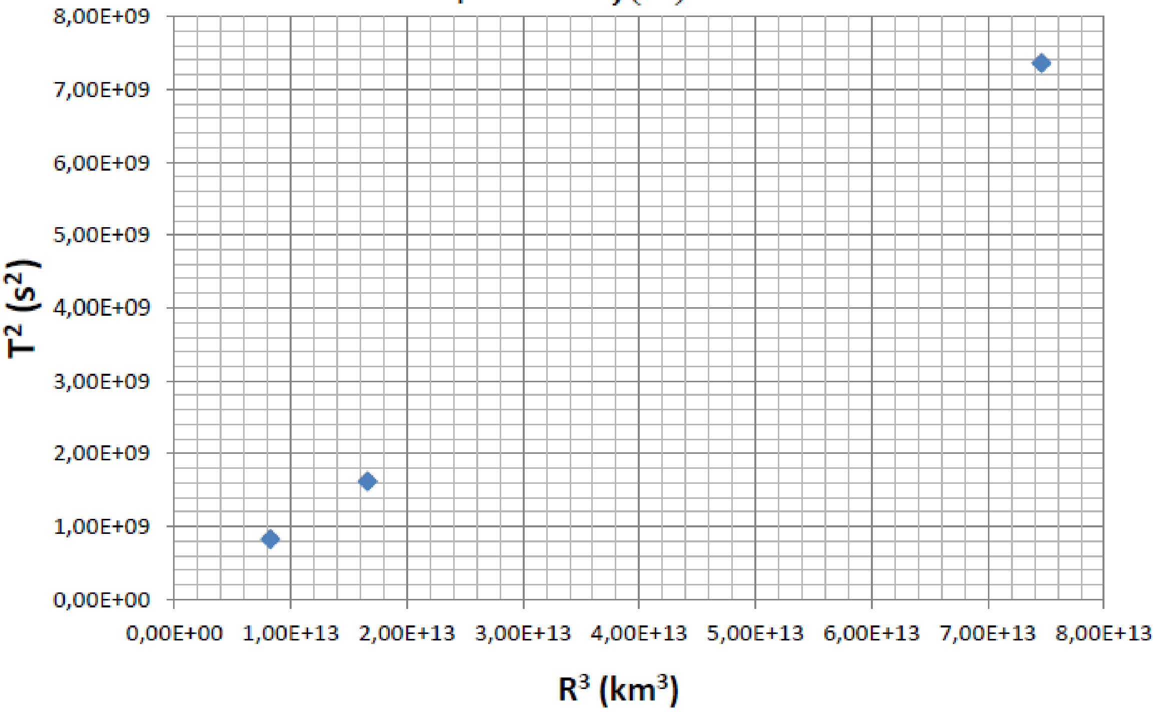
Partie 3. Étude du satellite géostationnaire METEOSAT 8

7. Quelle doit être la période de révolution d'un satellite pour qu'il soit géostationnaire ?
8. Déterminer la valeur de l'altitude, en *km*, à laquelle doit orbiter un satellite géostationnaire.
9. Calculer, en $km.s^{-1}$, la vitesse d'un satellite géostationnaire.

Annexe 1. Caractéristique de satellite

satellite	rayon de la trajectoire R (km)	période de révolution T (s)	R^3 (km^3)	T^2 (s^2)
GPS	$20,2\times10^3$	$2,88\times10^4$	$8,24\times10^{12}$	$8,29\times10^8$
GLONASS	$25,5\times10^3$	$4,02\times10^4$	$1,66\times10^{13}$	$1,62\times10^9$
GALILEO				
METEOSAT	$42,1\times10^3$	$8,58\times10^4$	$7,46\times10^{13}$	$7,36\times10^9$

Annexe 2. Graphe de $T^2 = f(R^3)$



Exercice 2. La station spatiale internationale ISS

La station spatiale internationale ISS (International Space Station) est à ce jour le plus grand des objets artificiels placé en orbite terrestre à une altitude de 400 km. Elle est occupée en permanence par un équipage international qui se consacre à la recherche scientifique dans l'environnement spatial. La station spatiale internationale, supposée ponctuelle et notée S, évolue sur une orbite qu'on admettra circulaire, dont le plan est incliné de 51,6° par rapport au plan de l'équateur. Son altitude est environ égale à 400 km.

Données :

- rayon de la Terre : R_T = 6380 km
- masse de la station : m = 435 tonnes
- masse de la Terre, supposée ponctuelle : M = $5,98\times10^{24}$ kg
- constante de gravitation universelle : G = $6,67\times10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- altitude de la station ISS : h = 400 km

1. Déterminer la valeur de la vitesse de la station en $m.s^{-1}$.
2. Combien de révolutions autour de la Terre un astronaute présent à bord de la station spatiale internationale fait-il en 24h ?

Exercice 1

Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse $m_{sat} = 700$ kg. Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et sa trajectoire est considérée circulaire à l'altitude $h = 23{,}6\times10^3$ km. Le mouvement du satellite est étudié dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :

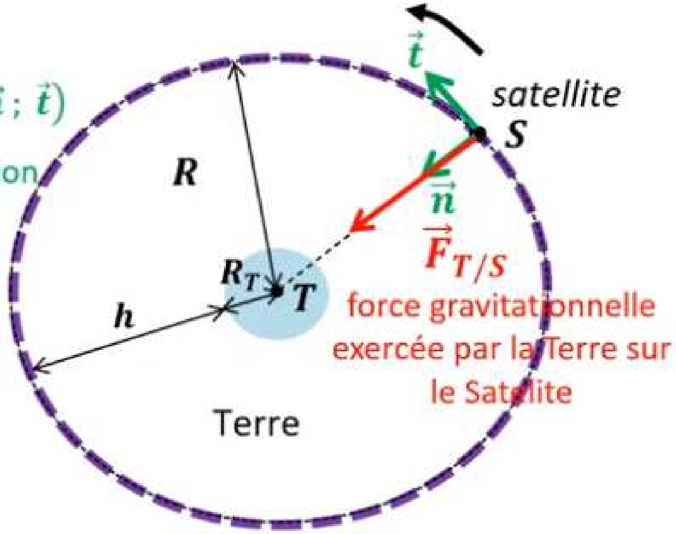
- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67\times10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- La Terre est supposée sphérique et homogène de masse $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6{,}38\times10^3$ km

Partie 1. Mouvement du satellite Giove-A autour de la Terre

1. Sans souci d'échelle, faire un schéma représentant la Terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la Terre sur le satellite.
2. Donner l'expression vectorielle de la force exercée par la Terre sur le satellite en fonction des données de l'énoncé et d'un vecteur unitaire à définir.
3. Établir l'expression vectorielle du vecteur accélération du point G et en déduire que la vitesse du satellite est uniforme et calculer sa valeur en $km.h^{-1}$.
4. Calculer la période de révolution T du satellite.

1.

repère mobile de Frenet $(S;\ \vec{n}\ ;\ \vec{t})$



2.

$$\vec{F}_{T/S} = \overbrace{+}^{\text{sens}}\overbrace{G\frac{M_T m_{sat}}{R^2}}^{\text{valeur}}\overbrace{\vec{n}}^{\text{direction}}$$

$$R = R_T + h$$

3.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{T/S} = m_{sat}\vec{a}_{sat}$$

P.F.D
(2ème loi de Newton)

$$+\,G\frac{M_T m_{sat}}{R^2}\vec{n} = m_{sat}\vec{a}_{sat}$$

$$\rightarrow \vec{a}_{sat} = G\frac{M_T}{R^2}\vec{n} \quad \text{or} \quad \vec{a}_{sat} = \frac{v_{sat}^2}{R}\vec{n} + \frac{dv_{sat}}{dt}\vec{t}$$

comme pour tout mouvement circulaire

$$\frac{dv_{sat}}{dt} = 0 \rightarrow v_{sat} \text{ constante}$$

$$G\frac{M_T}{R^2} = \frac{v_{sat}^2}{R}$$

$$\rightarrow v_{sat}^2 = \frac{GM_T}{R}$$

$$\boxed{v_{sat} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

kg

m

$$v_{sat} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{(6{,}38+23{,}6)\times10^6}} = 3{,}65\times10^3\ m.s^{-1} = 3{,}65\times10^3\times3{,}6\ km.h^{-1} = \mathbf{13{,}1\times10^3\ km.h^{-1}}$$

périmètre $2\pi R$

parcouru pendant T à la vitesse v_{sat}

4. $v_{sat} = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{T}$

$$\mathbf{T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v_{sat}}}$$

$$T = \frac{2\pi(6{,}38+23{,}6)\times10^6}{3{,}65\times10^3}$$

$$= \mathbf{5{,}16\times10^4\ s \approx 14h\ 20min}$$

Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse $m_{sat} = 700$ kg. Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et sa trajectoire est considérée circulaire à l'altitude $h = 23{,}6 \times 10^3$ km. Le mouvement du satellite est étudié dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :

- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- La Terre est supposée sphérique et homogène de masse $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km

Partie 2. Détermination de la masse de la Terre

Il existe actuellement deux systèmes de positionnement par satellites : le système américain GPS et le système russe GLONASS. Le tableau fourni dans la suite (annexe 1), rassemble les périodes T et les rayons R des trajectoires des satellites correspondants, ainsi que les données relatives aux satellites de type Météosat.

5. Placer le point correspondant à Giove-A sur le graphe en annexe 2, et montrer que $T^2 = f(R^3)$ est une fonction linéaire.
6. Déterminer à l'aide de la courbe une valeur expérimentale de la masse de la Terre. Expliquer.

Annexe 1. Caractéristique de satellite

satellite	rayon de la trajectoire R (km)	période de révolution T (s)	R^3 (km^3)	T^2 (s^2)
GPS	$20{,}2 \times 10^3$	$2{,}88 \times 10^4$	$8{,}24 \times 10^{12}$	$8{,}29 \times 10^8$
GLONASS	$25{,}5 \times 10^3$	$4{,}02 \times 10^4$	$1{,}66 \times 10^{13}$	$1{,}62 \times 10^9$
GALILEO	$30{,}0 \times 10^3$	$5{,}16 \times 10^4$	$\mathbf{2{,}70 \times 10^{13}}$	$\mathbf{2{,}67 \times 10^9}$
METEOSAT	$42{,}1 \times 10^3$	$8{,}58 \times 10^4$	$7{,}46 \times 10^{13}$	$7{,}36 \times 10^9$

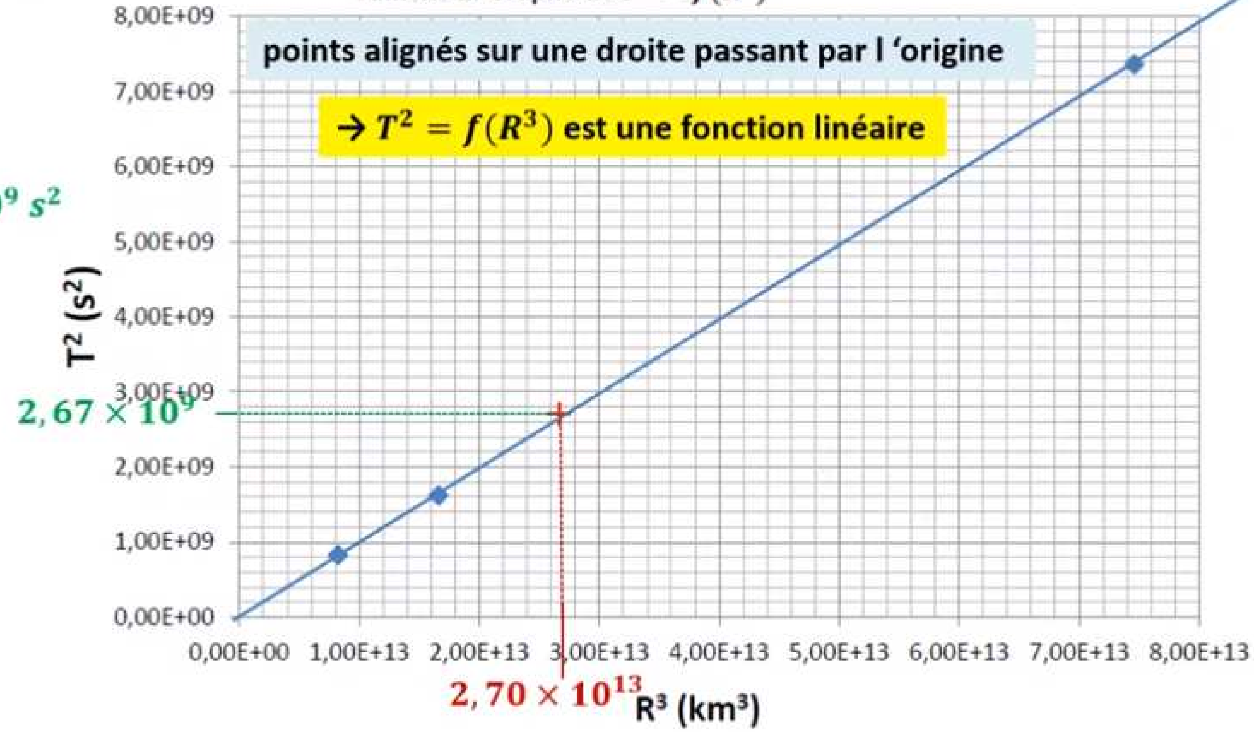
5.

$$\boldsymbol{R} = R_T + h = (6{,}38 + 23{,}6) \times 10^3 = 30{,}0 \times 10^3\ km$$

$$\boldsymbol{R^3} = (30{,}0 \times 10^3)^3 = \mathbf{2{,}70 \times 10^{13}\ km^3}$$

$$\boldsymbol{T} = 5{,}16 \times 10^4\ s \qquad \boldsymbol{T^2} = (5{,}16 \times 10^4)^2 = \mathbf{2{,}67 \times 10^9\ s^2}$$

Annexe 2. Graphe de $T^2 = f(R^3)$



Le satellite Giove-A est assimilé à un point matériel G de masse m_{sat} = 700 kg. Il est supposé soumis à la seule interaction gravitationnelle due à la Terre, et sa trajectoire est considérée circulaire à l'altitude h = $23{,}6 \times 10^3$ km. Le mouvement du satellite est étudié dans le référentiel géocentrique considéré galiléen.

Données :
- Constante universelle de gravitation : G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- La Terre est supposée sphérique et homogène de masse $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km

Partie 2. Détermination de la masse de la Terre

Il existe actuellement deux systèmes de positionnement par satellites : le système américain GPS et le système russe GLONASS. Le tableau fourni dans la suite (annexe 1), rassemble les périodes T et les rayons R des trajectoires des satellites correspondants, ainsi que les données relatives aux satellites de type Météosat.

5. Placer le point correspondant à Giove-A sur le graphe en annexe 2, et montrer que $T^2 = f(R^3)$ est une fonction linéaire.
6. Déterminer à l'aide de la courbe une valeur expérimentale de la masse de la Terre. Expliquer.

Annexe 1. Caractéristique de satellite

satellite	rayon de la trajectoire R (km)	période de révolution T (s)	R^3 (km^3)	T^2 (s^2)
GPS	$20{,}2 \times 10^3$	$2{,}88 \times 10^4$	$8{,}24 \times 10^{12}$	$8{,}29 \times 10^8$
GLONASS	$25{,}5 \times 10^3$	$4{,}02 \times 10^4$	$1{,}66 \times 10^{13}$	$1{,}62 \times 10^9$
GALILEO	$30{,}0 \times 10^3$	$5{,}16 \times 10^4$	$\mathbf{2,70 \times 10^{13}}$	$\mathbf{2,67 \times 10^9}$
METEOSAT	$42{,}1 \times 10^3$	$8{,}58 \times 10^4$	$7{,}46 \times 10^{13}$	$7{,}36 \times 10^9$

6.

3ème loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$

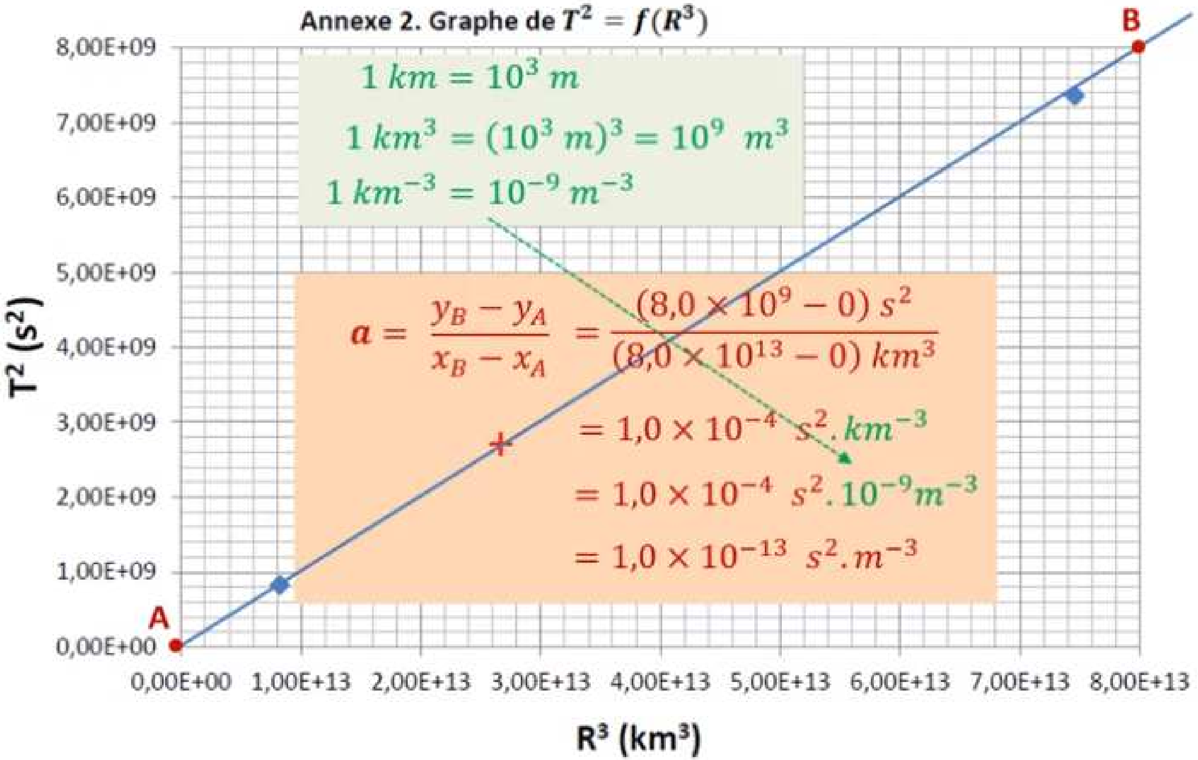
fonction linéaire : $T^2 = \boxed{\dfrac{4\pi^2}{GM_T}} \times R^3$

$y = \boldsymbol{a} \times x$

$\boldsymbol{a} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T} \quad \rightarrow \boxed{\boldsymbol{M_T} = \dfrac{4\pi^2}{G \times \boldsymbol{a}}}$: homogène !

$$\frac{1}{m^3.kg^{-1}.s^{-2} \times s^2.m^{-3}} = \frac{1}{kg^{-1}} = kg$$

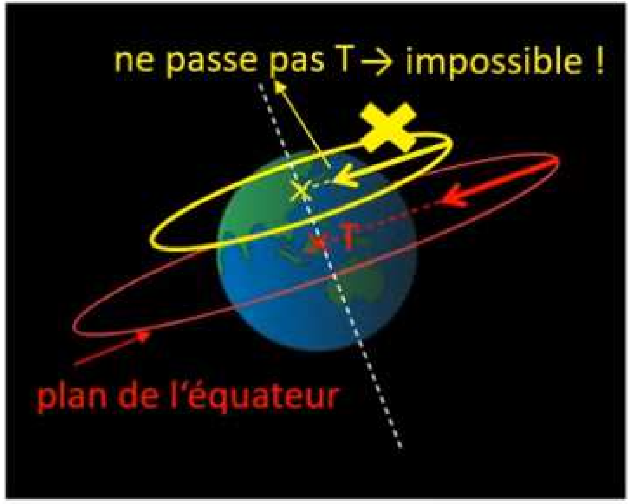
$$\boldsymbol{M_T} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}0 \times 10^{-13}} = \boxed{\mathbf{5,9 \times 10^{24}}\ \boldsymbol{kg}}$$



Doc 2 : METEOSAT, un satellite géostationnaire
Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004. D'une masse de 282 kg, METEOSAT a été satellisé sur une orbite circulaire et géostationnaire, c'est-à-dire de manière à ce que sa position paraisse fixe aux yeux d'un observateur terrestre. Il fournit ainsi de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.

Partie 3. Étude du satellite géostationnaire METEOSAT 8

7. Quelle doit être la période de révolution d'un satellite pour qu'il soit géostationnaire ?
8. Déterminer la valeur de l'altitude, en km, à laquelle doit orbiter un satellite géostationnaire.
9. Calculer, en $km.s^{-1}$, la vitesse d'un satellite géostationnaire.



7. conditions pour être géostationnaire :

- couvrir la même zone sur Terre → période de révolution du satellite : $\boxed{T_{géo} = 24\ h}$
- orbiter dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles
- orbiter dans le plan de l'équateur à environ 36 000 km

8. $$\frac{T_{géo}^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \rightarrow R^3 = \frac{T_{géo}^2 GM_T}{4\pi^2}$$

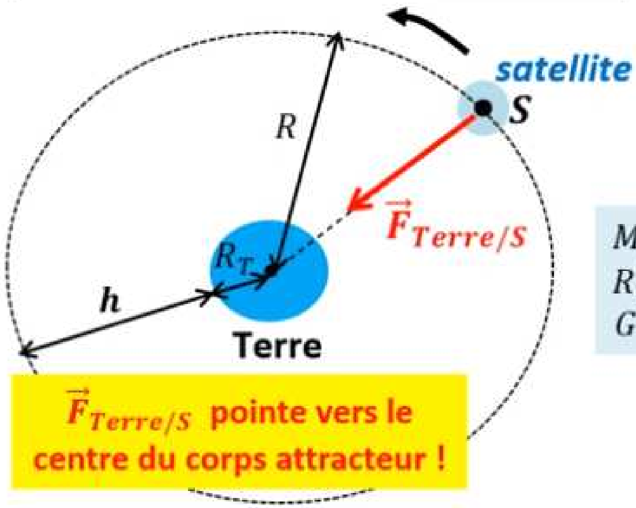
3ème loi de Kepler

$$\rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{T_{géo}^2 GM_T}{4\pi^2}} = \left(\frac{T_{géo}^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\sqrt[2]{\ \ } = (\ \ )^{1/2}$$
$$\sqrt[n]{\ \ } = (\ \ )^{1/n}$$

$$R = \left(\frac{(24 \times 3600)^2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4{,}23 \times 10^7\ m = 4{,}23 \times 10^4\ km$$

$$\rightarrow \boldsymbol{h} = R - R_T = 42{,}3 \times 10^3 - 6{,}38 \times 10^3 = 42{,}3 \times 10^3 - 6{,}38 \times 10^3 \ \mathbf{= 35{,}9 \times 10^3\ km}$$
altitude



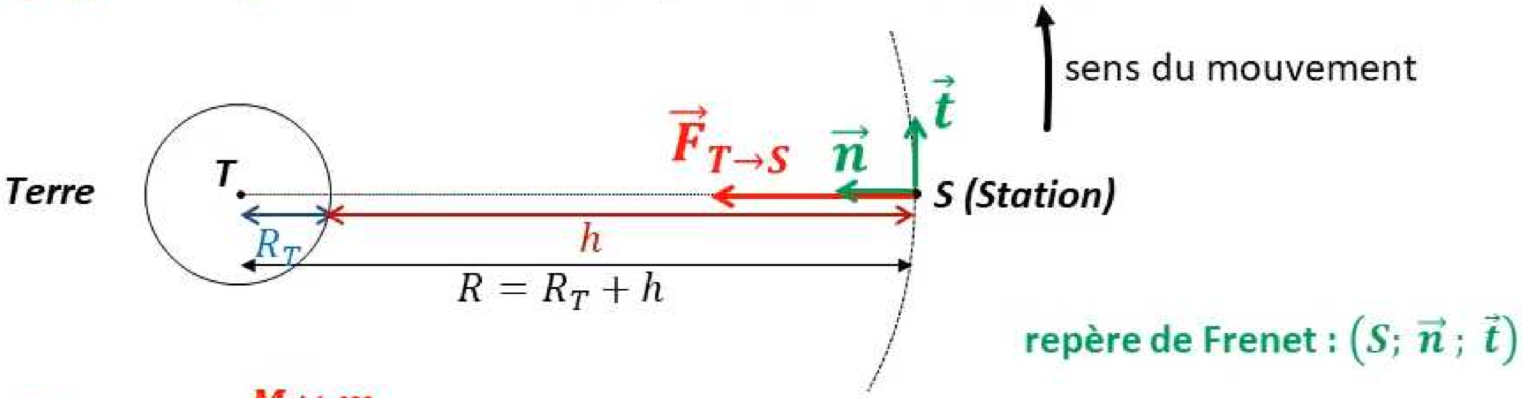
$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$
$R_T = 6{,}38 \times 10^3\ km$
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

9. $$v_{sat} = \frac{2\pi R_{géo}}{T_{géo}} = \frac{2\pi \times 4{,}23 \times 10^4\ km}{24 \times 3600\ s}$$

$$\mathbf{v_{sat} = 3{,}08\ km.s^{-1}}$$

Exercice 2

$\vec{F}_{T\to S}$: force gravitationnelle exercée par la Terre sur la station



$$\vec{F}_{T\to S} = +G\frac{M \times m}{R^2}\vec{n}$$

PFD appliqué à la station étudiée dans le référentiel géocentrique considéré galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a}_S \;\Rightarrow\; \vec{F}_{T\to S} = +\,G\frac{M \times m}{R^2}\vec{n} = m \times \vec{a}_S \;\Rightarrow\; \vec{a}_S = +\,G\frac{M}{R^2}\vec{n}$$

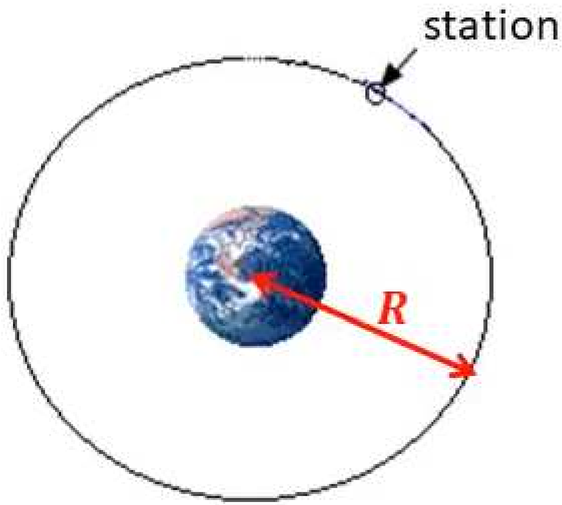
$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_S &= +\,G\frac{M}{R^2}\vec{n} \\ \vec{a}_S &= \frac{v^2}{R}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{t} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = 0 \quad \to \text{ la vitesse } v \text{ est constante} \\ &G\frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R} \quad \to \quad v^2 = \frac{GM}{R} \end{aligned}$$

$$\to \; \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{GM}}{\boldsymbol{R}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6780 \times 10^3}} = \mathbf{7{,}67 \times 10^3}\ \boldsymbol{m.s^{-1}}$$

2. Combien de révolutions autour de la Terre un astronaute présent à bord de la station spatiale internationale fait-il en 24h ?

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v}$$

T: période de révolution de la station



$$T = \frac{2\pi \times 6780 \times 10^3}{7{,}67 \times 10^3} = 5{,}55 \times 10^3\ s$$

$$24\ h = 24 \times 3600 = 86\ 400\ s$$

$$\rightarrow \quad \frac{86\ 400}{5{,}55 \times 10^3} \approx 15$$

→ Un astronaute à bord de la station fait environ 15 révolutions de la Terre en 24h.